BASISBOEK REKENEN

Jan van de Craats en Rob Bosch

voorlopige versie, 10 oktober 2006

ISBN-13: xxx
ISBN-10: xxx
NUR: yyy
Trefw: rekenen, rekenonderwijs

Illustraties en LaTeX-opmaak: Jan van de Craats

Prof. dr. J. van de Craats is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit, dr. R. Bosch is universitair hoofddocent wiskunde aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda.

Van dezelfde auteurs: *Basisboek wiskunde*, Pearson Education Benelux, 2005, ISBN 90-430-1156-8

Inhoudsopgave

Leeswijzer

Rekenen leer je door te oefenen. Elk hoofdstuk van dit boek begint daarom op de linkerpagina met opgaven. Je kunt er direct mee aan de slag, want de eerste opgaven zijn altijd gemakkelijk. Geleidelijk worden ze moeilijker. Zodra je een opgave gemaakt hebt, kun je je antwoord achterin controleren.

Op de rechterbladzijden staat, heel beknopt, een toelichting bij de opgaven links. Je kunt die naar behoefte gebruiken. Kom je termen of begrippen tegen die daar niet verklaard worden, dan kun je via het trefwoordenregister dat achterin het boek staat, de plaats vinden waar die uitleg wél staat.

Tenzij anders aangegeven is, mag je bij de opgaven geen rekenmachine gebruiken.

Dankbetuiging

Dank, dank, dank!

Voorwoord

Dit boek is geschreven voor iedereen die wil leren rekenen of weggezakte rekenvaardigheden wil bijspijkeren. Het is vooral ook bedoeld voor studenten aan de pabo en de technische en economische opleidingen in het mbo en het hbo. Het boek begint met eenvoudige optelsommen en werkt dan het gehele repertoire af van optellen en aftrekken, vermenigvuldigen en delen (inclusief de staartdeling), rekenen met decimale breuken ('kommagetallen'), andere breuken, negatieve getallen en machtsverheffen. Daarnaast zijn er toepassingen in het rekenen met geldbedragen, procenten, wisselkoersen, maten en gewichten.

Oefenen staat centraal

In de didactische opzet van dit boek staat oefenen centraal. De stof is opgedeeld in korte hoofdstukken die allemaal op de linkerbladzijde beginnen met opgaven waar je direct mee aan de slag kunt. Op de rechterbladzijden staat uitleg, vaak aan de hand van voorbeelden. De antwoorden vind je achterin zodat je telkens zelf je resultaten kunt controleren. Raadpleeg de tekst op de rechterbladzijden naar behoefte. De inhoudsopgave en het trefwoordenregister maken het snel opzoeken van weggezakte kennis gemakkelijk.

Geen basisschoolboek

Het *Basisboek rekenen* is niet bedoeld als leer- of werkboek voor de basisschool. Daar zal de leraar die de stof beheerst elke keer weer in de dagelijkse praktijk inspiratie vinden om de rekenles te verlevendigen met actuele voorbeelden, puzzels, projecten en leuke toepassingen. Maar daarbij mogen de basisoefeningen niet vergeten worden. Leerlingen moeten juist daardoor rekenvaardigheid en zelfvertrouwen opbouwen. Voor die oefeningen kunnen de opgaven uit *Basisboek rekenen* wél model staan. Denk trouwens niet dat leerlingen het maken van rijtjes sommen vervelend vinden. Mits goed opgebouwd en goed gedoseerd is het nog steeds de meest effectieve onderwijsvorm. Het is net als met voetballen, pianospelen of het leren van een vreemde taal: oefening baart kunst. En als je merkt dat je er wat van leert, is oefenen juist een stimulans om door te gaan. Elke goede leraar weet hoe stimulerend het ook voor zwakke leerlingen is wanneer zij erin slagen goed oefenmateriaal onder de knie te krijgen.

Hoofdrekenen

In het vroegere rekenonderwijs was hoofdrekenen heel belangrijk. Tegenwoordig hechten we daar wat minder waarde aan, ook al omdat er voor het echt lastige en omvangrijke rekenwerk computers zijn. Maar bij alle exacte, technische en economische vakken moet je toch ook zelf een behoorlijke hoofd- en handrekenvaardigheid hebben. In elk geval moet je eenvoudige berekeningen met kleine getallen, zoals $6 + 9$, $15 - 8$, 8×7, $63 : 7$ zonder nadenken, als het ware op de automatische piloot, kunnen uitvoeren. Je moet ze gewoon paraat hebben. In dit boek zeggen we bij zulke sommen dat je ze *uit je hoofd moet kennen*. Dat bereik je op den duur vanzelf omdat je ze zo vaak gebruikt, maar in het begin moet je dit soort kennis domweg in je hoofd stampen, net zoals je woordjes in je hoofd moet stampen als je een vreemde taal wilt leren.

Rekenmachines

Alle opgaven uit dit boek kunnen gemakkelijk met een rekenmachine worden gemaakt. Waarom leren we leerlingen dan niet alleen maar hoe ze de knoppen van zo'n apparaat moeten bedienen? Dat is in een paar lessen gebeurd, en je bent overal van af. De reden is duidelijk: zo werkt het niet. Op die manier krijgen leerlingen zelf geen rekenvaardigheid en vertrouwen in het werken met getallen. Natuurlijk zijn er veel beroepen waarin je dat zelfvertrouwen niet mist en waarin je zelf ook maar nauwelijks hoeft te kunnen rekenen. Maar het beroep van leraar aan een basisschool hoort daar niet bij, want leerlingen die later te maken krijgen met techniek, economie en exacte vakken moeten wél goed kunnen rekenen. Anders wordt het met de wiskunde en met ingewikkelde formules helemaal niets. Elke basisschoolleraar heeft zulke leerlingen in de klas, en hij of zij zal dus ook zelf vlot en foutloos moeten kunnen rekenen. Met pen en papier wel te verstaan, en bij eenvoudige opgaven uit het hoofd. Het is daarnaast natuurlijk goed als leerlingen ook al vroeg leren om een eenvoudige rekenmachine te gebruiken. Dat is trouwens in een paar minuten geleerd; niemand heeft daar moeite mee. Maar alleen als je ook zonder zo'n ding goed kunt rekenen, blijf jij het apparaat de baas en kun je hem laten doen wat jij wilt.

Rekenprogramma's op de computer

Op het internet en in de handel zijn veel programma's beschikbaar waarmee je zelf je rekenvaardigheden kunt verbeteren. Bij gebruik op school zijn de resultaten daarvan echter nogal eens teleurstellend, en dat ligt vaak niet aan de kwaliteit van die programma's. Daar is meestal niets mis mee, en als je het écht wilt, kun je er ook veel van leren. Maar als je met zo'n computerprogramma werkt, ben je snel geneigd te denken dat je genoeg hebben geoefend. Bovendien gokken veel leerlingen vaak het antwoord, vooral bij meerkeuzesommen. Maar daar leer je niets van. En omdat je meestal met één muisklik het goede antwoord of een aanwijzing krijgt, ga je niet zelf eerst een tijdje zitten piekeren wat de oplossing zou kunnen zijn. En dat is nu juist zo leerzaam!

Veel oefenopgaven

Rekenprogramma's op de computer hebben zeker hun verdienste, maar in onze ervaring is een van de meest effectieve methodes nog steeds het geconcentreerd werken met pen en papier. Het is ook daarom dat wij een overvloed aan oefenopgaven (met antwoorden achterin) in ons boek hebben opgenomen. Controleer na elk rijtje dat je gemaakt hebt, je antwoorden achterin. Probeer te leren van je fouten! Juist door veel opgaven te maken leer je het meest. En wie behoefte heeft aan nog meer oefenmateriaal kan zelf direct extra sommen bedenken volgens de gegeven voorbeelden. Als je jezelf nog niet vertrouwt, kun je je antwoorden dan met een rekenmachine controleren, maar we hopen eigenlijk dat je inmiddels zo veel eigen controlemogelijkheden in je methodes hebt ingebouwd, dat je dat ook zonder rekenmachine kunt doen. Ook het uitvoeren van zulke controles is erg leerzaam! Nogmaals, het is niet dat we een hekel hebben aan rekenmachines of computers, integendeel, maar wel willen we dat je eerst zelf een stevige basis aan rekenvaardigheden bereikt.

Competentiegericht

Basisboek rekenen is *competentiegericht*, om een modieuze didactische term te gebruiken. In gewoon Nederlands: als je dit boek hebt doorgewerkt, kun je goed rekenen. Je zult die rekenvaardigheid ook nooit meer kwijtraken. Ook bij het rekenen met een rekenmachine begrijp je dan wat je doet en waarom je het doet. Dat is iets waar je je hele leven plezier van zult hebben. Rekentechnisch ben je goed op je taken voorbereid als je op de basisschool zelf rekenonderwijs gaat geven of in andere beroepen met cijfermateriaal en berekeningen te maken krijgt. En je hebt de juiste voorkennis en vaardigheden om in vervolgopleidingen als economie, bedrijfskunde, gezondheidskunde, techniek of de exacte vakken met succes met getallen en formules te kunnen werken.

Wij hebben het *Basisboek rekenen* geschreven omdat er in het huidige onderwijs behoefte is aan zo'n boek en omdat we uit ervaring weten dat de in dit boek gevolgde didactische methode succesvol is. Voor op- en aanmerkingen van gebruikers en andere geïnteresseerden houden we ons aanbevolen!

Oosterhout en Breda, najaar 2006,
Jan van de Craats en Rob Bosch

I Natuurlijke getallen

Dit deel gaat over getallen waarmee je *aantallen* kunt weergeven: *vijf* vingers aan je hand, *twaalf* appels op een schaal, *zestig* minuten in een uur, *zestien miljoen* Nederlanders, *nul* euro in je portemonnee. Ze worden *natuurlijke getallen* genoemd. Het zijn de eenvoudigste getallen die er zijn. Later zul je ook met andere getallen kennismaken: decimale breuken ('kommagetallen'), andere breuken, negatieve getallen en machten. Maar om daarmee te werken, moet je eerst met natuurlijke getallen kunnen rekenen. Dat leer je in dit deel. De eenvoudigste berekeningen moet je snel uit het hoofd kunnen maken, voor alle andere berekeningen leer je overzichtelijke pen-en-papiermethodes die altijd werken.

1 Optellen

Oefen de volgende opgaven net zo lang totdat je dit soort optellingen vlot en vrijwel zonder nadenken paraat hebt. Het gaat dus om alle mogelijke combinaties van twee getallen van één cijfer.

1.1
a. $4+7=$
b. $6+3=$
c. $8+5=$
d. $6+4=$
e. $9+2=$

1.2
a. $8+7=$
b. $5+6=$
c. $3+5=$
d. $0+9=$
e. $7+5=$

1.3
a. $8+3=$
b. $7+9=$
c. $9+0=$
d. $1+5=$
e. $4+8=$

1.4
a. $4+4=$
b. $5+5=$
c. $6+6=$
d. $7+7=$
e. $8+8=$

1.5
a. $8+9=$
b. $3+9=$
c. $9+1=$
d. $6+0=$
e. $7+4=$

1.6
a. $0+0=$
b. $5+9=$
c. $7+8=$
d. $3+2=$
e. $3+8=$

1.7
a. $2+8=$
b. $7+3=$
c. $6+5=$
d. $4+6=$
e. $9+9=$

1.8
a. $9+8=$
b. $3+7=$
c. $1+9=$
d. $6+8=$
e. $4+5=$

1.9
a. $2+7=$
b. $6+9=$
c. $7+6=$
d. $9+5=$
e. $3+8=$

Bij de volgende opgaven vragen we je een kleine opteltabel in te vullen. De eerste hebben we zelf ingevuld om je te laten zien hoe zoiets gaat.

1.10

+	5	8
5	10	13
9	14	17

1.11

+	7	6
9		
6		

1.12

+	4	8
7		
9		

1.13

+	4	9
8		
7		

1.14

+	7	6
9		
5		

1.15

+	9	8
5		
7		

1.16

+	3	8
7		
5		

1.17

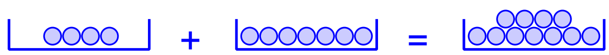
+	4	7
8		
3		

1.18

+	9	6
8		
7		

De opteltabel

Dit hoofdstuk gaat over optellen, bijvoorbeeld $4+7$. Wat betekent dat? Kijk naar de figuur hieronder.

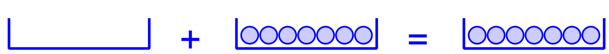


In het linkerschaaltje liggen vier ballen, in het rechterschaaltje zeven. Gooi je ze in één schaal bij elkaar, dan heb je er elf: vier ballen plus zeven ballen is samen elf ballen. We noemen 11 de *som* van 4 en 7, schrijven $4+7 = 11$ en spreken dit uit als *vier plus zeven is elf*. Het teken '+' heet het *plusteken*. Op school wordt soms 'en' in plaats van 'plus' gezegd (4 en 7 is 11), en soms wordt ook 'erbij' gebruikt: (4 erbij 7 is 11).

Optellen van twee getallen onder de 10 moet je vlot uit je hoofd kunnen. De sommen op de bladzijde hiertegenover zijn bedoeld om je daarin te oefenen. Hieronder hebben we alle uitkomsten overzichtelijk in één tabel bij elkaar gezet. De uitkomst 11 van de som $4+7$ vind je op het kruispunt van de horizontale rij met nummer 4 en de verticale kolom met nummer 7.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Met ballen in schaaltjes kun je alle sommen uit deze tabel illustreren. Ook bijvoorbeeld $0+7=7$, want dan is het linkerschaaltje leeg:



De tabel zelf zit ook mooi en overzichtelijk in elkaar: bij elk stapje naar rechts of naar beneden komt er 1 bij. Oefen alle sommen net zo lang totdat je ze snel uit je hoofd kunt maken, en houd dit ook bij! Bij *alle* verdere berekeningen in dit boek heb je die vaardigheid nodig.

1.19
- a. $40 + 50 =$
- b. $60 + 50 =$
- c. $80 + 40 =$
- d. $30 + 90 =$
- e. $80 + 20 =$

1.20
- a. $60 + 70 =$
- b. $20 + 90 =$
- c. $80 + 70 =$
- d. $10 + 90 =$
- e. $40 + 70 =$

1.21
- a. $90 + 90 =$
- b. $30 + 80 =$
- c. $70 + 50 =$
- d. $30 + 70 =$
- e. $70 + 70 =$

1.22
- a. $400 + 700 =$
- b. $600 + 500 =$
- c. $800 + 400 =$
- d. $900 + 700 =$
- e. $500 + 500 =$

1.23
- a. $300 + 400 =$
- b. $600 + 700 =$
- c. $800 + 800 =$
- d. $100 + 900 =$
- e. $200 + 900 =$

1.24
- a. $700 + 700 =$
- b. $900 + 800 =$
- c. $700 + 500 =$
- d. $300 + 600 =$
- e. $800 + 700 =$

1.25
- a. $4000 + 7000 =$
- b. $6000 + 3000 =$
- c. $8000 + 3000 =$
- d. $6000 + 5000 =$
- e. $9000 + 3000 =$

1.26
- a. $4000 + 5000 =$
- b. $6000 + 6000 =$
- c. $7000 + 6000 =$
- d. $8000 + 8000 =$
- e. $9000 + 2000 =$

1.27
- a. $3000 + 9000 =$
- b. $6000 + 3000 =$
- c. $1000 + 9000 =$
- d. $7000 + 7000 =$
- e. $9000 + 9000 =$

Nu door elkaar:

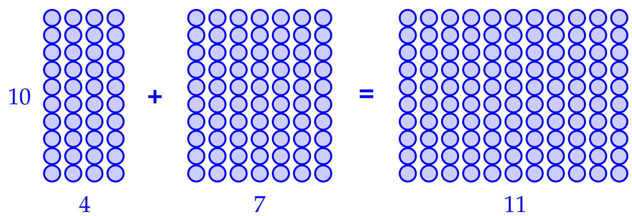
1.28
- a. $7 + 7 =$
- b. $60 + 60 =$
- c. $800 + 500 =$
- d. $6 + 9 =$
- e. $9000 + 7000 =$

1.29
- a. $6000 + 8000 =$
- b. $90 + 40 =$
- c. $800 + 600 =$
- d. $9000 + 9000 =$
- e. $100 + 900 =$

1.30
- a. $700 + 400 =$
- b. $9 + 8 =$
- c. $80 + 90 =$
- d. $6000 + 4000 =$
- e. $4000 + 7000 =$

Tientallen, honderdtallen, duizendtallen

Nu je weet dat $4+7=11$ kun je ook makkelijk uitrekenen wat $40+70$ is. Kijk maar:



Je ziet dat vier staafjes van tien balletjes plus zeven staafjes van tien balletjes samen elf staafjes van tien balletjes geven. Anders gezegd: vier *tientallen* plus zeven *tientallen* is samen elf *tientallen*. Dus $40+70=110$. Het is heel simpel: gewoon zonder nullen optellen en er dan weer een nul achter zetten, *want als je een nul achter een getal zet, dan maak je het* 10 *maal zo groot.*

Met *honderdtallen* kun je dezelfde truc uithalen. We maken er geen nieuw plaatje bij, want staafjes van honderd balletjes zijn lastiger te tekenen, maar je snapt zonder plaatje ook wel wat er uit $400+700$ moet komen. Vier honderdtallen plus zeven honderdtallen is elf honderdtallen: $400+700=1100$. Wat erachter zit, is dit: *als je twee nullen achter een getal zet, maak je het* 100 *maal zo groot.* Je snapt dat trouwens direct als je aan geld denkt: 1 euro is 100 eurocent, dus 4 euro is 400 eurocent, 7 euro is 700 eurocent, en samen is dat 11 euro, oftewel 1100 eurocent.

En nog een stapje verder, nu met *duizendtallen*: $4000+7000=11000$. *Als je drie nullen achter een getal zet, maak je het* 1000 *maal zo groot.* Denk als toepassing maar aan biljetten van 1000 euro. Vier biljetten van 1000 euro plus zeven biljetten van 1000 euro is samen elf biljetten van 1000 euro, dat is 11000 euro.

1.31
a. $18+7=$
b. $26+5=$
c. $78+9=$
d. $64+8=$
e. $19+2=$

1.32
a. $8+17=$
b. $5+36=$
c. $3+89=$
d. $6+87=$
e. $7+25=$

1.33
a. $18+9=$
b. $73+8=$
c. $29+9=$
d. $25+7=$
e. $34+8=$

1.34
a. $49+4=$
b. $57+5=$
c. $76+6=$
d. $77+7=$
e. $88+8=$

1.35
a. $8+19=$
b. $5+89=$
c. $9+17=$
d. $6+68=$
e. $7+49=$

1.36
a. $82+9=$
b. $59+2=$
c. $74+8=$
d. $57+6=$
e. $62+9=$

1.37
a. $4+17=$
b. $6+13=$
c. $18+5=$
d. $16+4=$
e. $9+22=$

1.38
a. $18+7=$
b. $5+26=$
c. $3+45=$
d. $66+9=$
e. $7+45=$

1.39
a. $8+39=$
b. $47+9=$
c. $91+8=$
d. $55+7=$
e. $4+38=$

1.40
a. $14+7=$
b. $26+5=$
c. $38+4=$
d. $13+9=$
e. $78+3=$

1.41
a. $6+27=$
b. $2+19=$
c. $8+27=$
d. $1+79=$
e. $4+87=$

1.42
a. $19+9=$
b. $23+8=$
c. $37+5=$
d. $83+7=$
e. $17+7=$

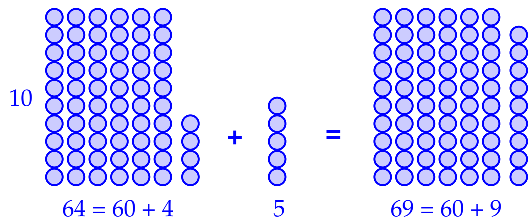
1.43
a. $42+\ \ 7=$
b. $\ \ 6+25=$
c. $89+\ \ 4=$
d. $\ \ 9+22=$
e. $56+\ \ 6=$

1.44
a. $39+4=$
b. $62+9=$
c. $88+8=$
d. $31+9=$
e. $47+7=$

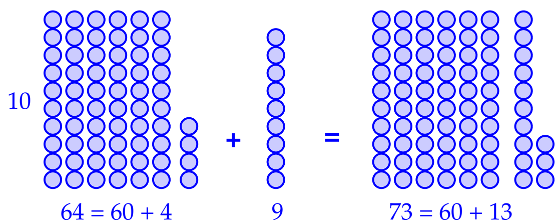
1.45
a. $71+7=$
b. $90+8=$
c. $7+55=$
d. $3+68=$
e. $85+7=$

Over een tiental heen tellen

Als je $64 + 5$ wilt uitrekenen, splits je 64 in 60 en 4. Omdat $4 + 5 = 9$ geldt ook $64 + 5 = 60 + 4 + 5 = 60 + 9 = 69$, kijk maar:



Soms moet je over een tiental heentellen, bijvoorbeeld als je $64 + 9$ wilt uitrekenen. Je weet immers dat $4 + 9 = 13$, en dus is $64 + 9 = 60 + 4 + 9 = 60 + 13 = 73$. Hieronder zie je er een plaatje bij.



Ook dit soort optelsommen moet je vlot uit je hoofd kunnen maken. Op de bladzijde hiertegenover staat oefenmateriaal. Maak er gebruik van!

1.46
a. $7 + 4 + 8 =$
b. $6 + 2 + 9 =$
c. $5 + 5 + 5 =$
d. $8 + 6 + 4 =$
e. $3 + 9 + 5 =$

1.47
a. $8 + 9 + 5 =$
b. $3 + 8 + 7 =$
c. $6 + 8 + 8 =$
d. $5 + 7 + 7 =$
e. $9 + 7 + 6 =$

1.48
a. $9 + 9 + 9 =$
b. $7 + 5 + 8 =$
c. $8 + 7 + 6 =$
d. $9 + 8 + 7 =$
e. $6 + 1 + 6 =$

1.49
a. $7 + 5 + 7 =$
b. $9 + 3 + 7 =$
c. $8 + 8 + 8 =$
d. $7 + 7 + 7 =$
e. $6 + 6 + 6 =$

1.50
a. $9 + 5 + 3 + 8 =$
b. $7 + 6 + 8 + 5 =$
c. $8 + 5 + 6 + 9 =$
d. $3 + 8 + 7 + 6 =$
e. $6 + 7 + 6 + 7 =$

1.51
a. $8 + 6 + 7 + 5 =$
b. $9 + 6 + 7 + 3 =$
c. $2 + 8 + 5 + 8 =$
d. $7 + 6 + 1 + 6 =$
e. $4 + 7 + 6 + 2 =$

1.52
a. $7 + 3 + 2 + 4 =$
b. $7 + 9 + 8 + 4 =$
c. $5 + 5 + 2 + 4 =$
d. $3 + 9 + 8 + 2 =$
e. $4 + 5 + 6 + 8 =$

1.53
a. $7 + 7 + 7 + 7 =$
b. $9 + 2 + 1 + 5 =$
c. $8 + 8 + 8 + 8 =$
d. $8 + 9 + 8 + 9 =$
e. $9 + 9 + 9 + 9 =$

1.54
a. $5 + 7 + 8 + 9 =$
b. $5 + 2 + 9 + 5 =$
c. $8 + 6 + 8 + 2 =$
d. $7 + 9 + 8 + 4 =$
e. $9 + 8 + 7 + 6 =$

1.55
a. $3 + 6 + 9 + 2 + 4 =$
b. $7 + 5 + 3 + 8 + 2 =$
c. $5 + 5 + 7 + 6 + 4 =$
d. $6 + 6 + 3 + 8 + 7 =$
e. $7 + 5 + 8 + 6 + 1 =$

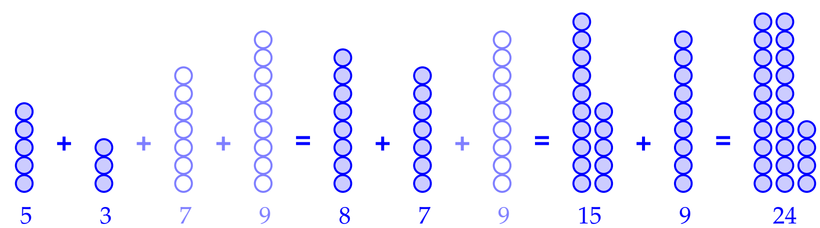
1.56
a. $7 + 5 + 7 + 8 + 8 =$
b. $9 + 8 + 7 + 3 + 7 =$
c. $8 + 8 + 8 + 8 + 8 =$
d. $7 + 5 + 7 + 5 + 7 =$
e. $9 + 9 + 9 + 9 + 9 =$

Doortellen uit je hoofd

Voor het 'optellen onder elkaar' dat we later gaan leren, is het belangrijk dat je ook langere optellingen van getallen van één cijfer uit je hoofd kunt maken zoals bijvoorbeeld $5+3+7+9$. Je doet dat als volgt: 5 plus 3 is 8, plus 7 is 15, plus 9 is 24. Dus

$$5+3+7+9 = (5+3)+7+9 = 8+7+9 = (8+7)+9 = 15+9 = 24$$

Wat tussen haakjes staat, hoort bij elkaar en wordt eerst uitgerekend. In de figuur hieronder zie je hoe dat gaat. In een lichte kleur staan de staafjes die op dat moment nog niet gebruikt worden. Elke tussenstap doe je uit je hoofd. Op de bladzijde hiertegenover vind je oefenmateriaal.



1.57
- a. $18 + 11 =$
- b. $15 + 14 =$
- c. $18 + 13 =$
- d. $17 + 15 =$
- e. $19 + 12 =$

1.58
- a. $22 + 12 =$
- b. $45 + 15 =$
- c. $16 + 26 =$
- d. $69 + 11 =$
- e. $73 + 16 =$

1.59
- a. $18 + 62 =$
- b. $34 + 57 =$
- c. $39 + 49 =$
- d. $46 + 29 =$
- e. $74 + 12 =$

1.60
- a. $14 + 23 =$
- b. $51 + 15 =$
- c. $63 + 16 =$
- d. $17 + 73 =$
- e. $28 + 38 =$

1.61
- a. $18 + 29 =$
- b. $33 + 39 =$
- c. $29 + 41 =$
- d. $62 + 28 =$
- e. $17 + 59 =$

1.62
- a. $23 + 25 =$
- b. $56 + 29 =$
- c. $73 + 26 =$
- d. $55 + 43 =$
- e. $12 + 49 =$

1.63
- a. $43 + 38 =$
- b. $65 + 22 =$
- c. $47 + 45 =$
- d. $33 + 61 =$
- e. $62 + 29 =$

1.64
- a. $26 + 57 =$
- b. $25 + 49 =$
- c. $67 + 28 =$
- d. $13 + 77 =$
- e. $21 + 71 =$

1.65
- a. $33 + 44 =$
- b. $33 + 62 =$
- c. $77 + 21 =$
- d. $39 + 56 =$
- e. $43 + 28 =$

1.66
$$\begin{array}{r} 63 \\ 24 \\ \hline \end{array} +$$

1.67
$$\begin{array}{r} 44 \\ 35 \\ \hline \end{array} +$$

1.68
$$\begin{array}{r} 54 \\ 43 \\ \hline \end{array} +$$

1.69
$$\begin{array}{r} 72 \\ 27 \\ \hline \end{array} +$$

1.70
$$\begin{array}{r} 67 \\ 23 \\ \hline \end{array} +$$

1.71
$$\begin{array}{r} 58 \\ 25 \\ \hline \end{array} +$$

1.72
$$\begin{array}{r} 76 \\ 21 \\ \hline \end{array} +$$

1.73
$$\begin{array}{r} 54 \\ 37 \\ \hline \end{array} +$$

1.74
$$\begin{array}{r} 35 \\ 35 \\ \hline \end{array} +$$

1.75
$$\begin{array}{r} 47 \\ 47 \\ \hline \end{array} +$$

1.76
$$\begin{array}{r} 49 \\ 49 \\ \hline \end{array} +$$

1.77
$$\begin{array}{r} 36 \\ 36 \\ \hline \end{array} +$$

1.78
$$\begin{array}{r} 68 \\ 23 \\ \hline \end{array} +$$

1.79
$$\begin{array}{r} 44 \\ 29 \\ \hline \end{array} +$$

1.80
$$\begin{array}{r} 47 \\ 43 \\ \hline \end{array} +$$

1.81
$$\begin{array}{r} 28 \\ 37 \\ \hline \end{array} +$$

1.82
$$\begin{array}{r} 39 \\ 33 \\ \hline \end{array} +$$

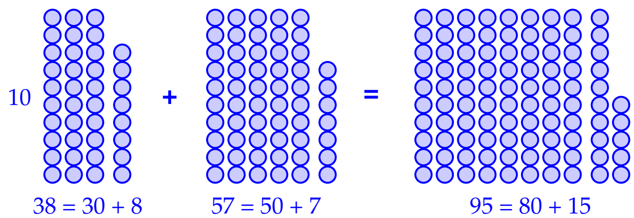
1.83
$$\begin{array}{r} 59 \\ 35 \\ \hline \end{array} +$$

1.84
$$\begin{array}{r} 67 \\ 14 \\ \hline \end{array} +$$

1.85
$$\begin{array}{r} 54 \\ 46 \\ \hline \end{array} +$$

Getallen van twee cijfers optellen

We nemen nu optelsommen van twee getallen van twee cijfers. Bijvoorbeeld $38+57$. Dat gaat in twee stappen. Bereken eerst $8+7=15$ (de eenheden) en dan $30+50=80$ (de tientallen). Tel de uitkomsten daarna op: $15+80=95$. Dit is de uitkomst. Hieronder zie je er een plaatje bij.



Zulke sommen kun je nog gemakkelijk uit je hoofd maken. Op de hiertegenover liggende bladzijde staat flink wat oefenmateriaal.

Als je dit soort sommen met pen en papier maakt, is het handig om de twee getallen niet achter elkaar te zetten, maar *onder elkaar*. Dan staan de eenheden onder elkaar en de tientallen ook, en dan gaat het optellen haast automatisch goed. Dat is bovendien een goede voorbereiding op het onder elkaar optellen van grotere getallen dat we in de volgende paragraaf gaan behandelen. We laten het hier weer zien met de optelsom $38+57$ als voorbeeld.

$$
\begin{array}{rlcrl}
38 & & & & \\
57 & + & & & \\
\hline
15 & & \longleftarrow & 8+\ \ 7 & \textit{(eenheden)} \\
80 & + & \longleftarrow & 30+50 & \textit{(tientallen)} \\
\hline
95 & & \longleftarrow & 38+57 &
\end{array}
$$

In de praktijk schrijf je het veel korter op. Je doet het wel weer in twee stappen. Eerst tel je de eenheden bij elkaar op (de rechterkolom): $8+7=15$. Daar zit een tiental in: $15=10+5$. Je schrijft onder de streep daarom eerst alleen de 5 op (zie de linkerfiguur hieronder) en vervolgens tel je de 1 op bij de andere tientallen: $1+3+5=9$ (zie de rechterfiguur hieronder). Klaar.

$$
\textit{stap 1:}\quad \begin{array}{rl} 38 & \\ 57 & + \\ \hline 5 & \end{array}
\qquad\qquad
\textit{stap 2:}\quad \begin{array}{rl} 38 & \\ 57 & + \\ \hline 95 & \end{array}
$$

Oefen jezelf hierin door de opgaven op de linkerbladzijde te maken.

Maak de volgende opgaven. Om erin te komen, geven we eerst een aantal opgaven waarbij je slechts *twee* getallen onder elkaar moet optellen. Dan een aantal opgaven met drie getallen en tot slot een aantal opgaven met vier getallen. Je zult zien dat dat eigenlijk voor de moeilijkheid helemaal niets uitmaakt. Je moet wel nauwkeurig werken. Schrijf daarom telkens de getallen die je 'verhuist' bovenaan de kolom erbij.

1.86
$$\begin{array}{r} 154 \\ 68 \\ \hline \end{array} +$$

1.87
$$\begin{array}{r} 421 \\ 129 \\ \hline \end{array} +$$

1.88
$$\begin{array}{r} 356 \\ 572 \\ \hline \end{array} +$$

1.89
$$\begin{array}{r} 298 \\ 154 \\ \hline \end{array} +$$

1.90
$$\begin{array}{r} 234 \\ 167 \\ \hline \end{array} +$$

1.91
$$\begin{array}{r} 216 \\ 293 \\ \hline \end{array} +$$

1.92
$$\begin{array}{r} 396 \\ 270 \\ \hline \end{array} +$$

1.93
$$\begin{array}{r} 348 \\ 157 \\ \hline \end{array} +$$

1.94
$$\begin{array}{r} 234 \\ 168 \\ \hline \end{array} +$$

1.95
$$\begin{array}{r} 489 \\ 629 \\ \hline \end{array} +$$

1.96
$$\begin{array}{r} 355 \\ 523 \\ \hline \end{array} +$$

1.97
$$\begin{array}{r} 798 \\ 134 \\ \hline \end{array} +$$

1.98
$$\begin{array}{r} 271 \\ 607 \\ 213 \\ \hline \end{array} +$$

1.99
$$\begin{array}{r} 245 \\ 158 \\ 365 \\ \hline \end{array} +$$

1.100
$$\begin{array}{r} 726 \\ 176 \\ 64 \\ \hline \end{array} +$$

1.101
$$\begin{array}{r} 91 \\ 237 \\ 325 \\ \hline \end{array} +$$

1.102
$$\begin{array}{r} 512 \\ 674 \\ 203 \\ \hline \end{array} +$$

1.103
$$\begin{array}{r} 205 \\ 58 \\ 468 \\ \hline \end{array} +$$

1.104
$$\begin{array}{r} 737 \\ 379 \\ 95 \\ \hline \end{array} +$$

1.105
$$\begin{array}{r} 151 \\ 37 \\ 525 \\ \hline \end{array} +$$

1.106
$$\begin{array}{r} 451 \\ 267 \\ 203 \\ \hline \end{array} +$$

1.107
$$\begin{array}{r} 845 \\ 58 \\ 865 \\ \hline \end{array} +$$

1.108
$$\begin{array}{r} 737 \\ 77 \\ 360 \\ \hline \end{array} +$$

1.109
$$\begin{array}{r} 901 \\ 233 \\ 425 \\ \hline \end{array} +$$

1.110
$$\begin{array}{r} 491 \\ 260 \\ 307 \\ 713 \\ \hline \end{array} +$$

1.111
$$\begin{array}{r} 845 \\ 18 \\ 492 \\ 158 \\ \hline \end{array} +$$

1.112
$$\begin{array}{r} 726 \\ 134 \\ 345 \\ 364 \\ \hline \end{array} +$$

1.113
$$\begin{array}{r} 191 \\ 837 \\ 248 \\ 325 \\ \hline \end{array} +$$

Optellen onder elkaar – het recept

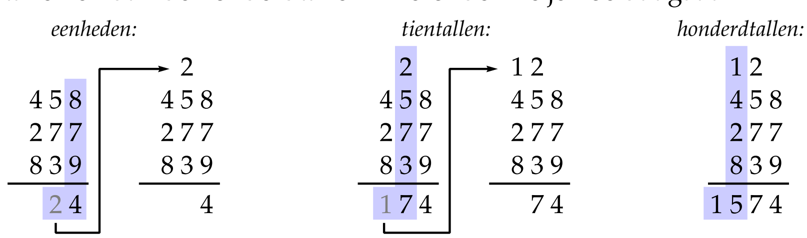
In deze paragraaf geven we het eerste *rekenrecept* van dit boek, een altijd succesvolle, snelle rekenmethode die nog steeds dagelijks wordt toegepast door iedereen die geen rekenmachine bij de hand heeft: het onder elkaar optellen van een rijtje getallen. In een eenvoudige vorm hebben we het al in de vorige paragraaf gedaan (twee getallen van twee cijfers optellen), maar nu nemen we grotere getallen en ook meer dan twee getallen want daarvoor werkt het recept net zo goed.

We leggen het uit met drie getallen van drie cijfers. Stel dat je 458, 277 en 839 bij elkaar moeten optellen. Het idee is weer: tel eerst alle eenheden bij elkaar op, dan alle tientallen en dan alle honderdtallen:

$$
\begin{array}{r}
8\\ 7\\ 9\\ \hline 24
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
50\\ 70\\ 30\\ \hline 150
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
400\\ 200\\ 800\\ \hline 1400
\end{array}
$$

Tot slot moet je dan nog die drie getallen bij elkaar optellen: uitkomst 1574.

Nu komt het echte recept. Schuif de drie optellingen als het ware in elkaar, en voer de totale optelling uit als een drietrapsraket: eerst de eenheden, dan de tientallen en dan de honderdtallen. Hieronder zie je hoe dat gaat.



1. Tel de eenheden (rechterkolom) bij elkaar op: $8 + 7 + 9 = 24$. *Van het getal* 24 *schrijf je alleen de* 4 *onder de streep, de* 2 *verhuist naar de bovenkant van de volgende kolom (de tientallen).*
2. Tel de tientallen (met de extra 2) bij elkaar op: $2 + 5 + 7 + 3 = 17$. Ook nu schrijf je alleen de 7 onder de streep, de 1 verhuist weer naar de bovenkant van de volgende kolom (de honderdtallen).
3. Tel de honderdtallen (met de extra 1) bij elkaar op: $1 + 4 + 2 + 8 = 15$. Klaar.

In woorden beschreven lijkt het ingewikkeld, maar in de praktijk leer je het snel. Bij elke stap hebben we voor de duidelijkheid het verhuizen van het extra getal (hier was dat 2 of 1) in twee stapjes getekend, maar dat doe je natuurlijk in één keer. En met meer dan drie getallen of met getallen van meer dan drie cijfers gaat het net zo.

Maak de volgende opgaven zonder de getallen die je 'verhuist' op te schrijven.

1.114
$$\begin{array}{r} 361 \\ 675 \\ 103 \\ \hline \end{array} +$$

1.115
$$\begin{array}{r} 675 \\ 482 \\ 163 \\ \hline \end{array} +$$

1.116
$$\begin{array}{r} 738 \\ 79 \\ 608 \\ \hline \end{array} +$$

1.117
$$\begin{array}{r} 161 \\ 537 \\ 522 \\ \hline \end{array} +$$

1.118
$$\begin{array}{r} 1453 \\ 2951 \\ 53 \\ 907 \\ \hline \end{array} +$$

1.119
$$\begin{array}{r} 1406 \\ 2386 \\ 4159 \\ 475 \\ \hline \end{array} +$$

1.120
$$\begin{array}{r} 888 \\ 2484 \\ 2338 \\ 2037 \\ \hline \end{array} +$$

1.121
$$\begin{array}{r} 578 \\ 9780 \\ 2222 \\ 3512 \\ \hline \end{array} +$$

1.122
$$\begin{array}{r} 1263 \\ 2451 \\ 167 \\ 536 \\ \hline \end{array} +$$

1.123
$$\begin{array}{r} 4096 \\ 2487 \\ 1150 \\ 3485 \\ \hline \end{array} +$$

1.124
$$\begin{array}{r} 897 \\ 2454 \\ 2378 \\ 234 \\ \hline \end{array} +$$

1.125
$$\begin{array}{r} 78 \\ 945 \\ 2273 \\ 3120 \\ \hline \end{array} +$$

1.126
$$\begin{array}{r} 768 \\ 11056 \\ 654 \\ 5403 \\ 31265 \\ 67 \\ 4511 \\ \hline \end{array} +$$

1.127
$$\begin{array}{r} 4568 \\ 4986 \\ 574 \\ 24073 \\ 2982 \\ 10149 \\ 582 \\ \hline \end{array} +$$

1.128
$$\begin{array}{r} 59 \\ 110 \\ 22222 \\ 8091 \\ 54 \\ 12344 \\ 2036 \\ \hline \end{array} +$$

1.129
$$\begin{array}{r} 34198 \\ 1782 \\ 3564 \\ 78435 \\ 7416 \\ 273 \\ 13156 \\ \hline \end{array} +$$

1.130
$$\begin{array}{r} 7168 \\ 71056 \\ 6754 \\ 54 \\ 31165 \\ 8767 \\ 4219 \\ \hline \end{array} +$$

1.131
$$\begin{array}{r} 43678 \\ 49806 \\ 5174 \\ 4078 \\ 2982 \\ 11490 \\ 58211 \\ \hline \end{array} +$$

1.132
$$\begin{array}{r} 593 \\ 4110 \\ 222 \\ 81094 \\ 566 \\ 37454 \\ 21039 \\ \hline \end{array} +$$

1.133
$$\begin{array}{r} 348 \\ 10782 \\ 32264 \\ 78695 \\ 71410 \\ 679 \\ 23186 \\ \hline \end{array} +$$

Opschrijven of onthouden?

De methode van de vorige paragraaf om rijtjes getallen bij elkaar op te tellen, werkt prima. Ervaren rekenaars zullen op den duur de getallen die we bovenaan de kolommen hebben bijgeschreven, niet meer echt opschrijven, maar onthouden en er direct mee doorrekenen. Als je je nog niet zeker voelt, moet je dat nog niet doen, maar hier geven we vast een voorbeeld met toelichting. Het gaat om een optelling van zeven getallen van twee, drie en vier cijfers. De optelling gaat dus in vier stappen, die we hier naast elkaar weergeven:

$$\begin{array}{r} 4372 \\ 656 \\ 1297 \\ 56 \\ 7895 \\ 733 \\ 3465 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4372 \\ 656 \\ 1297 \\ 56 \\ 7895 \\ 733 \\ 3465 \\ \hline 74 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4372 \\ 656 \\ 1297 \\ 56 \\ 7895 \\ 733 \\ 3465 \\ \hline 474 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4372 \\ 656 \\ 1297 \\ 56 \\ 7895 \\ 733 \\ 3465 \\ \hline 18474 \end{array}$$

Toelichting:

$2+6+7+6+5+3+5=34$, 4 opschrijven, $\boxed{3}$ onthouden.

$\boxed{3}+7+5+9+5+9+3+6=47$, 7 opschrijven, $\boxed{4}$ onthouden.

$\boxed{4}+3+6+2+8+7+4=34$, 4 opschrijven, $\boxed{3}$ onthouden.

$\boxed{3}+4+1+7+3=18$. Klaar. Uitkomst: 18474.

Je merkt weer hoe noodzakelijk het is om dit soort eenvoudige optellingen (telkens een getal van één cijfer erbij) vlot uit het hoofd te kunnen uitvoeren.

Controle: een mens maakt gemakkelijk fouten. Het is daarom een goede gewoonte om ter controle de optelling nog een keer uit te voeren, maar daarbij de kolommen niet van boven naar beneden, maar van beneden naar boven af te lopen. Het resultaat moet hetzelfde zijn.

2 Aftrekken

Oefen de volgende opgaven net zo lang tot je ze bijna blindelings, zonder verder nadenken kunt maken. Je hebt die vaardigheid in de rest van dit hoofdstuk voortdurend nodig!

2.1
- a. $9 - 7 =$
- b. $5 - 3 =$
- c. $6 - 4 =$
- d. $9 - 9 =$
- e. $4 - 2 =$

2.2
- a. $8 - 7 =$
- b. $5 - 2 =$
- c. $8 - 3 =$
- d. $7 - 0 =$
- e. $5 - 1 =$

2.3
- a. $18 - 3 =$
- b. $17 - 6 =$
- c. $15 - 5 =$
- d. $17 - 1 =$
- e. $18 - 4 =$

2.4
- a. $17 - 9 =$
- b. $15 - 8 =$
- c. $16 - 9 =$
- d. $13 - 4 =$
- e. $14 - 7 =$

2.5
- a. $18 - 9 =$
- b. $15 - 9 =$
- c. $10 - 8 =$
- d. $17 - 7 =$
- e. $16 - 7 =$

2.6
- a. $11 - 3 =$
- b. $12 - 8 =$
- c. $15 - 6 =$
- d. $11 - 9 =$
- e. $14 - 5 =$

2.7
- a. $14 - 3 =$
- b. $15 - 4 =$
- c. $16 - 9 =$
- d. $17 - 8 =$
- e. $18 - 9 =$

2.8
- a. $18 - 7 =$
- b. $13 - 5 =$
- c. $10 - 7 =$
- d. $16 - 0 =$
- e. $17 - 8 =$

2.9
- a. $12 - 3 =$
- b. $15 - 9 =$
- c. $17 - 5 =$
- d. $13 - 8 =$
- e. $19 - 9 =$

2.10
- a. $13 - 5 =$
- b. $16 - 9 =$
- c. $18 - 4 =$
- d. $19 - 8 =$
- e. $11 - 4 =$

2.11
- a. $12 - 6 =$
- b. $13 - 8 =$
- c. $14 - 5 =$
- d. $15 - 9 =$
- e. $16 - 8 =$

2.12
- a. $10 - 3 =$
- b. $13 - 7 =$
- c. $15 - 8 =$
- d. $12 - 9 =$
- e. $16 - 7 =$

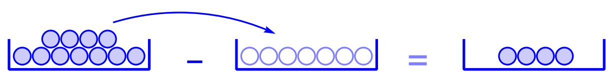
2.13
- a. $13 - 7 =$
- b. $16 - 5 =$
- c. $18 - 8 =$
- d. $11 - 8 =$
- e. $13 - 6 =$

2.14
- a. $12 - 9 =$
- b. $13 - 6 =$
- c. $14 - 9 =$
- d. $15 - 8 =$
- e. $16 - 9 =$

2.15
- a. $10 - 4 =$
- b. $13 - 8 =$
- c. $15 - 9 =$
- d. $18 - 2 =$
- e. $11 - 9 =$

De aftrektabel

Dit hoofdstuk gaat over het van elkaar aftrekken van twee getallen. Als voorbeeld zie je hieronder een plaatje bij $11 - 7 = 4$. In het linkerschaaltje liggen elf ballen. Als je daar zeven ballen af haalt en in een tweede schaaltje legt, houd je vier ballen in het eerste schaaltje over. We schrijven $11 - 7 = 4$ en spreken het uit als *elf min zeven is vier*. Het teken '$-$' heet het *minteken*. Op school wordt soms ook wel 'eraf' gebruikt in plaats van 'min', dus *elf eraf zeven is vier*.



Alle uitkomsten van aftreksommen met getallen onder de 20 staan in de onderstaande tabel. Op het kruispunt van rij nummer 11 en kolom nummer 7 vind je bijvoorbeeld de uitkomst 4 van $11 - 7$.

–	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
19	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
18	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0		
17	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0			
16	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0				
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0					
14	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0						
13	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0							
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0								
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0		rij nr. 11							
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0										
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0											
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0												
7	7	6	5	4	3	2	1	0													
6	6	5	4	3	2	1	0														
5	5	4	3	2	1	0															
4	4	3	2	1	0							11 – 7 = 4									
3	3	2	1	0																	
2	2	1	0					kolom nr. 7													
1	1	0																			
0	0																				

Met ballen in schaaltjes kun je alle aftreksommen uit deze tabel illustreren. Ook bijvoorbeeld $11 - 0 = 11$, want dan blijft het middelste schaaltje leeg:

De tabel zelf zit ook weer mooi en overzichtelijk in elkaar: bij elk stapje naar rechts of naar beneden gaat er 1 af. Oefen alle sommen op de tegenoverliggende bladzijde net zo lang totdat je ze snel uit je hoofd kunt maken!

2.16
a. $23 - 2 =$
b. $37 - 4 =$
c. $26 - 5 =$
d. $56 - 6 =$
e. $89 - 8 =$

2.17
a. $49 - 8 =$
b. $39 - 7 =$
c. $48 - 5 =$
d. $63 - 3 =$
e. $47 - 5 =$

2.18
a. $29 - 7 =$
b. $66 - 5 =$
c. $47 - 6 =$
d. $88 - 5 =$
e. $75 - 4 =$

2.19
a. $23 - 8 =$
b. $37 - 3 =$
c. $26 - 5 =$
d. $54 - 6 =$
e. $89 - 9 =$

2.20
a. $49 - 8 =$
b. $33 - 7 =$
c. $41 - 9 =$
d. $63 - 8 =$
e. $42 - 5 =$

2.21
a. $32 - 7 =$
b. $66 - 9 =$
c. $27 - 6 =$
d. $89 - 5 =$
e. $73 - 8 =$

2.22
a. $31 - 8 =$
b. $75 - 6 =$
c. $63 - 5 =$
d. $40 - 8 =$
e. $98 - 9 =$

2.23
a. $90 - 8 =$
b. $53 - 7 =$
c. $14 - 9 =$
d. $56 - 8 =$
e. $24 - 5 =$

2.24
a. $23 - 9 =$
b. $60 - 9 =$
c. $72 - 6 =$
d. $56 - 7 =$
e. $34 - 9 =$

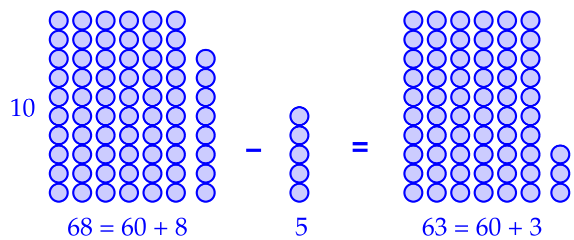
2.25
a. $31 - 5 =$
b. $76 - 8 =$
c. $64 - 5 =$
d. $42 - 8 =$
e. $90 - 9 =$

2.26
a. $70 - 8 =$
b. $53 - 6 =$
c. $14 - 7 =$
d. $52 - 8 =$
e. $24 - 7 =$

2.27
a. $63 - 9 =$
b. $75 - 6 =$
c. $70 - 4 =$
d. $56 - 8 =$
e. $30 - 9 =$

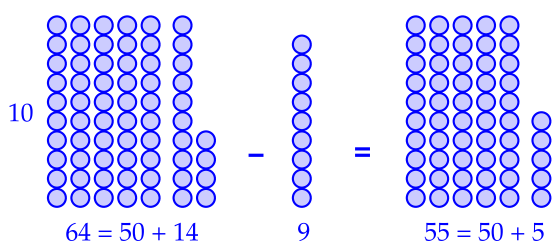
Moeilijkere aftreksommen

Als je alle aftreksommen uit de tabel op bladzijde 21 kent, kun je ook sommen als $68 - 5$ maken. Daar komt 63 uit want $68 = 60 + 8$ en $8 - 5 = 3$.

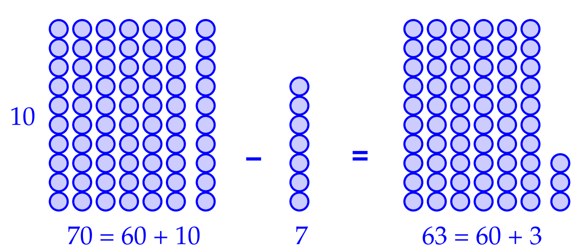


Op dezelfde manier is $127 - 3 = 124$ want $127 = 120 + 7$ en $7 - 3 = 4$. Je hoeft in deze gevallen dus alleen maar naar de laatste cijfers (de eenhedencijfers) te kijken.

Maar wat te doen met $64 - 9$? Nu kun je niet alleen maar naar de eenhedencijfers kijken, want 4 is kleiner dan 9. Maar als je 64 schrijft als $50 + 14$ lukt het wél. Je weet al dat $14 - 9 = 5$, dus $64 - 9 = 50 + 14 - 9 = 50 + 5 = 55$. Het komt erop neer dat je nu niet alleen maar naar de 4 van 64 kijkt, maar daar 14 van maakt door een 1 te 'kopen' van de 6 die er voor staat (en die nu dus een 5 wordt).



Hier is nog een voorbeeld, nu met $70 - 7$. Je moet 70 dan schrijven als $60 + 10$. Omdat $10 - 7 = 3$ is $70 - 7 = 60 + 10 - 7 = 60 + 3 = 63$.



Maak de volgende opgaven. Schrijf daarbij telkens de hulpcijfers op als je wat 'koopt', net als in de voorbeelden op de bladzijde hiertegenover.

2.28
$$\begin{array}{r} 63 \\ 24 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.29
$$\begin{array}{r} 44 \\ 35 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.30
$$\begin{array}{r} 84 \\ 47 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.31
$$\begin{array}{r} 72 \\ 37 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.32
$$\begin{array}{r} 163 \\ 86 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.33
$$\begin{array}{r} 442 \\ 358 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.34
$$\begin{array}{r} 804 \\ 431 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.35
$$\begin{array}{r} 272 \\ 39 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.36
$$\begin{array}{r} 603 \\ 286 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.37
$$\begin{array}{r} 400 \\ 372 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.38
$$\begin{array}{r} 840 \\ 531 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.39
$$\begin{array}{r} 972 \\ 839 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.40
$$\begin{array}{r} 6103 \\ 1289 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.41
$$\begin{array}{r} 6004 \\ 5729 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.42
$$\begin{array}{r} 5440 \\ 5333 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.43
$$\begin{array}{r} 1972 \\ 1869 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.44
$$\begin{array}{r} 16103 \\ 89 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.45
$$\begin{array}{r} 85404 \\ 15737 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.46
$$\begin{array}{r} 15440 \\ 453 \\ \hline \end{array}\ -$$

2.47
$$\begin{array}{r} 91720 \\ 1869 \\ \hline \end{array}\ -$$

Aftrekken onder elkaar

Het volgende rekenrecept gaat over het van elkaar aftrekken van twee getallen door ze onder elkaar te zetten. Hier is een voorbeeld. Het gaat in vier stappen.

$$\begin{array}{r}4375\\1242\\\hline 3\end{array}\ - \qquad \begin{array}{r}4375\\1242\\\hline 33\end{array}\ - \qquad \begin{array}{r}4375\\1242\\\hline 133\end{array}\ - \qquad \begin{array}{r}4375\\1242\\\hline 3133\end{array}\ -$$

Je werkt dus weer eerst de eenheden, dan de tientallen, dan de honderdtallen en dan de duizendtallen af. In dit geval hoefde je nergens iets te 'kopen'. In alle kolommen was het bovenste cijfer groter dan het onderste. Maar hieronder is dat niet meer zo:

$$\begin{array}{r}\\4325\\1242\\\hline 3\end{array}\ - \qquad \begin{array}{r}2\\4\cancel{3}25\\1242\\\hline 83\end{array}\ - \qquad \begin{array}{r}2\\4\cancel{3}25\\1242\\\hline 083\end{array}\ - \qquad \begin{array}{r}2\\4\cancel{3}25\\1242\\\hline 3083\end{array}\ -$$

Bij de tweede stap moesten we een 1 kopen want 2 is kleiner dan 4. De 3 links van de 2 hebben we daarom in 2 veranderd, en onder de streep schreven we 8 (als uitkomst van $12 - 4$). De laatste twee stappen gingen weer zonder problemen.

Wat moet je doen als het cijfer waar je van moet kopen, een 0 is? Gewoon een deurtje verder gaan! Maar die 0 dan wel in een 9 veranderen. Hieronder zie je een voorbeeld. Daarin hebben we bij de tweede stap een 1 gekocht van 40, en dus 40 in 39 veranderd.

$$\begin{array}{r}\\4025\\1242\\\hline 3\end{array}\ - \qquad \begin{array}{r}39\\\cancel{4}\cancel{0}25\\1242\\\hline 83\end{array}\ - \qquad \begin{array}{r}39\\\cancel{4}\cancel{0}25\\1242\\\hline 783\end{array}\ - \qquad \begin{array}{r}39\\\cancel{4}\cancel{0}25\\1242\\\hline 2783\end{array}\ -$$

Controleer je antwoord!
Bij aftrekken onder elkaar kun je je antwoord altijd snel controleren door van onder naar boven de omgekeerde optelsom uit te voeren. Hierboven hadden we de aftreksom $4025 - 1242 = 2783$ uitgerekend. Als dat goed is, moet gelden dat $2783 + 1242 = 4025$, en dat kun je in hetzelfde plaatje van onder naar boven door optellen controleren:

$$+\ \uparrow\quad \begin{array}{r}4025\\1242\\\hline 2783\end{array}\ -$$

Maak de volgende opgaven zonder de hulpcijfers erbij te schrijven.

2.48

$$\begin{array}{r} 205 \\ 173 \\ \hline \end{array}\; -$$

2.49

$$\begin{array}{r} 479 \\ 97 \\ \hline \end{array}\; -$$

2.50

$$\begin{array}{r} 650 \\ 78 \\ \hline \end{array}\; -$$

2.51

$$\begin{array}{r} 952 \\ 859 \\ \hline \end{array}\; -$$

2.52

$$\begin{array}{r} 105 \\ 88 \\ \hline \end{array}\; -$$

2.53

$$\begin{array}{r} 804 \\ 737 \\ \hline \end{array}\; -$$

2.54

$$\begin{array}{r} 651 \\ 453 \\ \hline \end{array}\; -$$

2.55

$$\begin{array}{r} 917 \\ 869 \\ \hline \end{array}\; -$$

2.56

$$\begin{array}{r} 15207 \\ 3389 \\ \hline \end{array}\; -$$

2.57

$$\begin{array}{r} 73484 \\ 55557 \\ \hline \end{array}\; -$$

2.58

$$\begin{array}{r} 18900 \\ 14553 \\ \hline \end{array}\; -$$

2.59

$$\begin{array}{r} 95681 \\ 81169 \\ \hline \end{array}\; -$$

2.60

a. $73 - 20 - 7 - 15 - 17 - 12 =$
b. $98 - 14 - 16 - 10 - 19 - 21 =$
c. $84 - 18 - 16 - 12 - 11 - 15 =$
d. $87 - 13 - 11 - 9 - 5 - 24 =$
e. $477 - 79 - 52 - 33 - 80 - 78 =$

2.61

a. $514 - 27 - 103 - 57 - 72 - 111 =$
b. $673 - 143 - 165 - 109 - 147 - 41 =$
c. $970 - 196 - 76 - 59 - 225 - 188 =$
d. $685 - 34 - 137 - 77 - 56 - 144 =$
e. $898 - 327 - 78 - 62 - 190 - 94 =$

Opschrijven of onthouden?

In de vorige paragraaf hebben we geleerd hoe je twee getallen van elkaar aftrekt door ze onder elkaar te schrijven. Bij die methode komt het vaak voor dat je een 1 moet 'kopen'. Je kunt dat met hulpcijfers erbij schrijven, zoals we dat ook hebben geoefend, maar natuurlijk zullen ervaren rekenaars alle tussenstapjes, inclusief het kopen, uit het hoofd uitvoeren, en dus ook geen cijfers doorstrepen of er hulpcijfers boven zetten. Maar het is wel goed als je dat in het begin wél doet, gewoon om te oefenen en daarbij goed te begrijpen wat aan het doen bent. In de opgaven op de linkerpagina vragen we je om dat nu niet meer te doen.

Meer getallen aftrekken

Er is nog iets dat we moeten zeggen. Je ziet dat we een recept hebben gegeven om één getal van een (groter) getal af te trekken. Maar wat te doen als je meer dan één getal van een groter getal moet aftrekken? Het is niet handig om dan alles in één rijtje onder elkaar te doen, want dan wordt het met al het kopen en alle hulpcijfers al snel een chaos.

Je kunt het natuurlijk wel *stap voor stap* doen, telkens één getal eraf, maar het handigste is het om alle getallen die je moet aftrekken eerst apart bij elkaar te nemen. Zet ze onder elkaar, tel ze bij elkaar op en trek daarna de uitkomst van die som in één keer van het grote getal af.

Hier is een voorbeeld. Stel dat de opgave luidt:

$$374 - 121 - 85 - 76 - 13 - 51 =$$

Dat kun je in vijf stappen doen: eerst 121 aftrekken van 374, daarna 85 van de uitkomst aftrekken, daarvan weer 76 enzovoort. Maar je kunt ook eerst $121 + 85 + 76 + 13 + 51$ uitrekenen (met een optelling onder elkaar) en de uitkomst (dat is 346) aftrekken van 374. Dat werkt veel beter en je maakt ook niet zo snel fouten. We herschrijven de opgave daarom als

$$374 - (121 + 85 + 76 + 13 + 51) =$$

Met haakjes geven we altijd aan dat er dingen bij elkaar horen. Hier is dat $121 + 85 + 76 + 13 + 51$. De uitkomst is 346 (reken maar na!). Die trekken we af van 374 en we krijgen $374 - 346 = 28$ als uitkomst van de hele opgave.

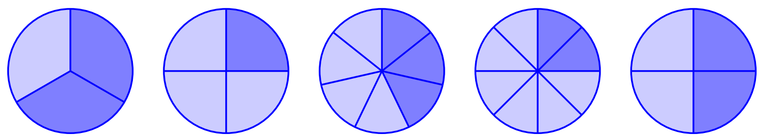
III Breuken

Dit deel gaat over breuken. Dat zijn getallen zoals $\frac{3}{4}$ of $\frac{12}{7}$. Ze hebben een *teller* en een *noemer*. Je leert hier hoe je breuken kunt vereenvoudigen, onder één noemer brengen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Bij het rekenen spelen delers en veelvouden een rol. Om breuken te vereenvoudigen kun je werken met de *grootste gemeenschappelijke deler* (ggd) van de teller en de noemer. Als je breuken wilt optellen of aftrekken kun je het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud* (kgv) van de noemers gebruiken. Vermenigvuldigen en delen met breuken is nog eenvoudiger: we zullen je laten zien hoe dat gaat. Daarna behandelen we het verband tussen breuken en kommagetallen. We sluiten af met een overzicht van alle rekenmethodes en een serie bijbehorende gemengde opgaven.

8 Wat zijn breuken?

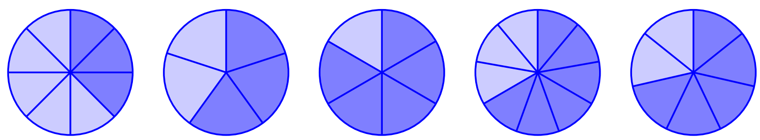
Geef bij elk van de de volgende pizzadiagrammen de breuk die erbij hoort.

8.1



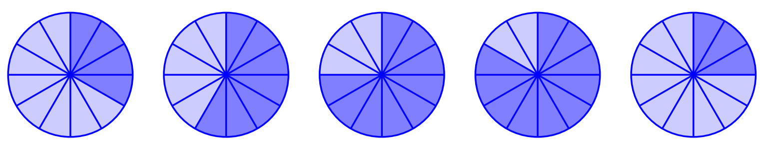
a b c d e

8.2



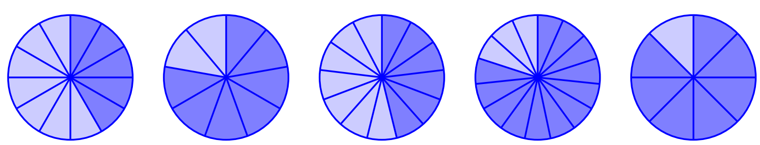
a b c d e

8.3

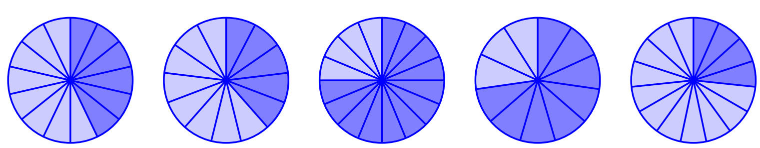


a b c d e

8.4 De tien pizzadiagrammen hieronder horen bij de volgende breuken: $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{6}{14}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{12}{16}$. Zoek bij elk diagram de bijbehorende breuk.



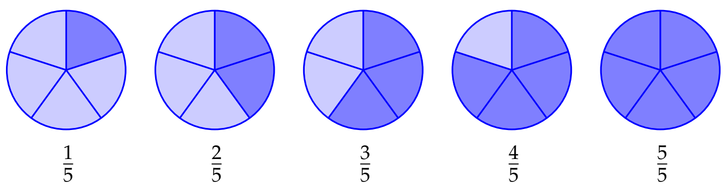
a b c d e



f g h i j

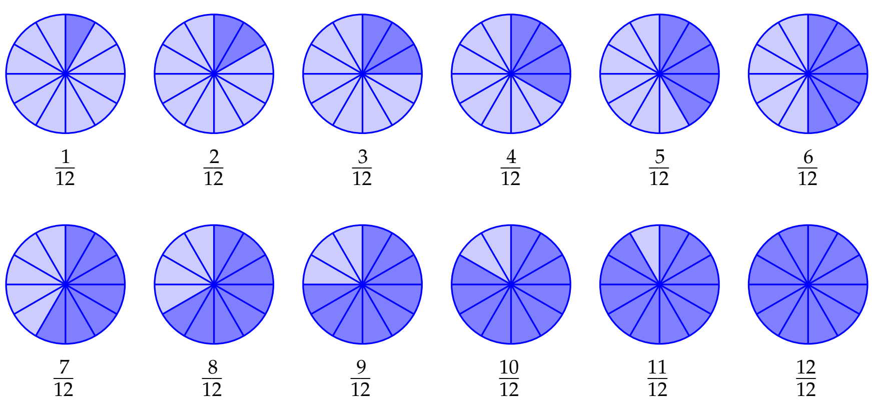
Pizza's delen

Hieronder zie je verdelingen van pizza's in vijf gelijke delen. Elk deel is *één vijfde* van de pizza. In de eerste tekening is één stukje donker gekleurd. Dat is $\frac{1}{5}$ (een vijfde) van de hele pizza. Daarnaast zijn twee stukjes donker gekleurd. Samen zijn ze $\frac{2}{5}$ (twee vijfde) van de hele pizza. Daarnaast drie, daarnaast vier en daarnaast vijf: de hele pizza. Eronder staan de *breuken* waarmee je die delen aangeeft.



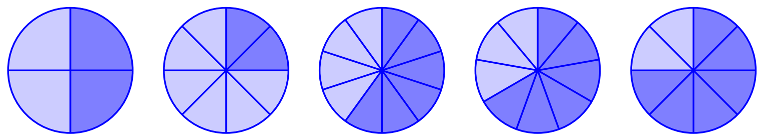
In zo'n breuk staan twee getallen onder elkaar, gescheiden door een horizontale *breukstreep*. Het getal boven de streep heet de *teller* van de breuk. Die *telt* het aantal donker gekleurde stukken. Het getal onder de streep heet de *noemer* van de breuk. Die *noemt* in hoeveel delen de pizza verdeeld is.

Hetzelfde kun je doen met elk ander getal als noemer. In de figuren hieronder staat telkens een verdeling van een pizza in twaalf gelijke stukken. De breuken die bij de donker gekleurde gedeeltes horen, staan er weer onder.



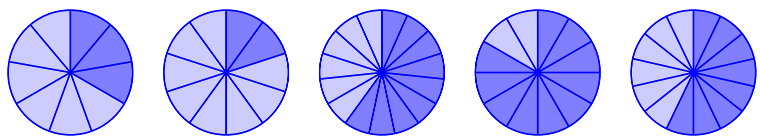
Geef bij elk van de de volgende pizzadiagrammen de breuk die erbij hoort en geef ook een zoveel mogelijk vereenvoudigde vorm van die breuk.

8.5



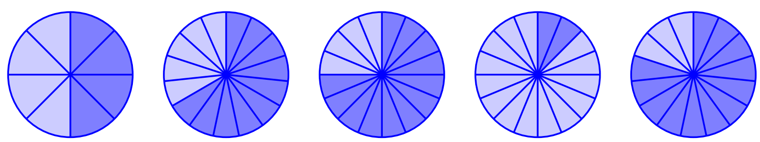
a b c d e

8.6



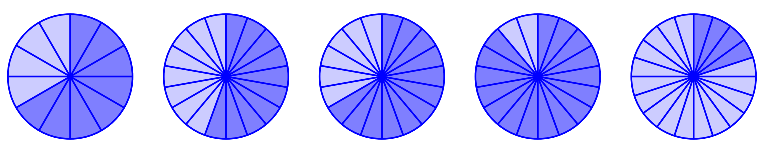
a b c d e

8.7



a b c d e

8.8



a b c d e

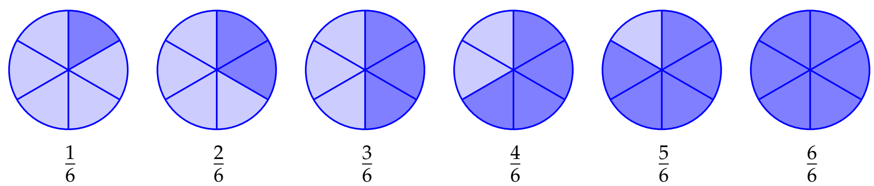
8.9 Van de breuken met noemer 12 die op bladzijde 75 via pizzastukken in beeld zijn gebracht, kun je er een flink aantal vereenvoudigen. Zo is bijvoorbeeld $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ (teller en noemer delen door 3). Ook in de pizzadiagrammen zelf kun je dat zien. Vereenvoudig nu ook de andere breuken met noemer 12 zoveel mogelijk. Bij welke breuken is geen vereenvoudiging mogelijk?

8.10 Vereenvoudig de volgende breuken:

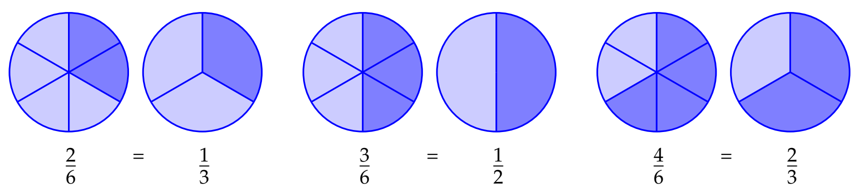
a. $\frac{6}{10}$ b. $\frac{18}{33}$ c. $\frac{24}{26}$ d. $\frac{12}{45}$ e. $\frac{25}{35}$

Het vereenvoudigen van breuken

Hieronder zie je weer een pizzaverdeling. Nu is elke pizza in zes stukken verdeeld. De bijbehorende breuken zijn $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ en $\frac{6}{6}$.



Bij deze verdeling is wat bijzonders aan de hand: twee zesde van een pizza is evenveel als één derde, drie zesde is evenveel als één tweede (een half) en vier zesde is evenveel als twee derde.



Je ziet dat $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ en $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Je komt van $\frac{2}{6}$ op $\frac{1}{3}$ als je *teller en noemer allebei door* 2 *deelt*. Bij $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ deel je teller en noemer allebei door 3. Dit heet het *vereenvoudigen* van een breuk. In het algemeen geldt:

> *Een breuk verandert niet als je teller en noemer allebei door hetzelfde getal deelt.*

Natuurlijk werkt dit ook de andere kant op:

> *Een breuk verandert niet als je teller en noemer allebei met hetzelfde getal vermenigvuldigt.*

Zo is bijvoorbeeld $\frac{5}{7} = \frac{15}{21}$ (teller en noemer vermenigvuldigd met 3).

Op de bladzijde hiertegenover kun je verder oefenen in het vereenvoudigen van breuken.

Vereenvoudig de volgende breuken zoveel mogelijk. Je moet dus als antwoord een breuk geven die je niet verder kunt vereenvoudigen.
Voorbeeld: Vereenvoudig $\frac{18}{12}$ zoveel mogelijk. Teller en noemer delen door 2 geeft $\frac{18}{12} = \frac{9}{6}$ als vereenvoudiging, maar $\frac{9}{6}$ kan nog verder vereenvoudigd worden tot $\frac{3}{2}$ (teller en noemer delen door 3). De zoveel mogelijk vereenvoudigde vorm van $\frac{18}{12}$ is dus $\frac{3}{2}$.

8.11
- a. $\frac{6}{8}$
- b. $\frac{8}{6}$
- c. $\frac{10}{14}$
- d. $\frac{6}{9}$
- e. $\frac{12}{15}$

8.12
- a. $\frac{70}{21}$
- b. $\frac{12}{20}$
- c. $\frac{63}{18}$
- d. $\frac{56}{24}$
- e. $\frac{20}{16}$

8.13
- a. $\frac{18}{10}$
- b. $\frac{12}{21}$
- c. $\frac{21}{35}$
- d. $\frac{24}{36}$
- e. $\frac{16}{24}$

8.14
- a. $\frac{70}{40}$
- b. $\frac{63}{90}$
- c. $\frac{50}{15}$
- d. $\frac{21}{70}$
- e. $\frac{110}{44}$

Bereken de ontbrekende teller:

8.15
- a. $\frac{\;}{10} = \frac{1}{2}$
- b. $\frac{\;}{16} = \frac{3}{4}$
- c. $\frac{\;}{10} = \frac{3}{5}$
- d. $\frac{\;}{12} = \frac{2}{3}$
- e. $\frac{\;}{14} = \frac{2}{7}$

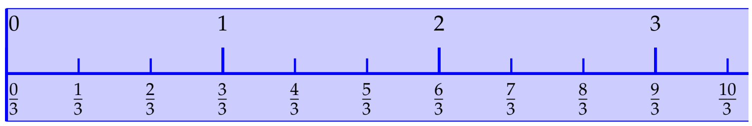
8.16
- a. $\frac{\;}{18} = \frac{5}{6}$
- b. $\frac{\;}{18} = 5$
- c. $\frac{\;}{33} = \frac{2}{11}$
- d. $\frac{\;}{24} = \frac{3}{8}$
- e. $\frac{\;}{20} = 7$

8.17
- a. $\frac{\;}{60} = \frac{5}{12}$
- b. $\frac{\;}{60} = \frac{17}{15}$
- c. $\frac{\;}{16} = 3$
- d. $\frac{\;}{63} = \frac{31}{21}$
- e. $\frac{\;}{81} = \frac{25}{9}$

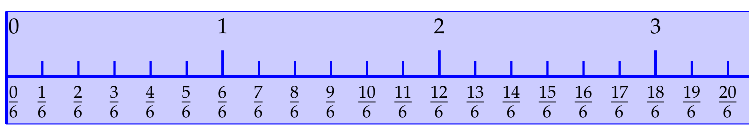
8.18
- a. $\frac{\;}{40} = \frac{11}{8}$
- b. $\frac{\;}{56} = \frac{7}{4}$
- c. $\frac{\;}{64} = 2$
- d. $\frac{\;}{72} = \frac{14}{9}$
- e. $\frac{\;}{48} = \frac{25}{16}$

Breuken op de getallenlijn

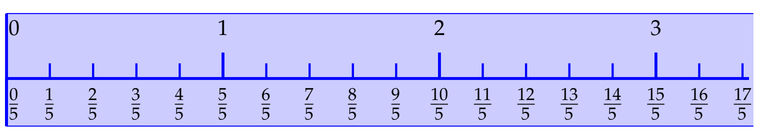
Uit de pizzadiagrammen zou je kunnen opmaken dat breuken niet groter dan 1 (een hele pizza) kunnen zijn, maar dat is niet zo. Hieronder staat een getallenlijn (liniaal) met daarop de breuken met noemer 3. Ze gaan naar rechts gewoon door, net zo ver als je maar wilt.



Je ziet ook dat $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{9}{3} = 3$ enzovoort. En ook dat $\frac{0}{3} = 0$. Een getallenlijn (liniaal) met breuken met noemer 6 ziet er zó uit:



Hier zie je ook weer dat $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ enzovoort. Door vereenvoudigen van breuken verandert hun plaats op de getallenlijn niet. Hieronder nog zo'n plaatje van een getallenlijn, nu met de breuken met noemer 5



Natuurlijke getallen als breuken

We hebben hierboven gezien dat je natuurlijke getallen ook als een breuk kunt schrijven, bijvoorbeeld met noemer 3: $0 = \frac{0}{3}$, $1 = \frac{3}{3}$, $2 = \frac{6}{3}$, $3 = \frac{9}{3}$ enzovoort. Of met noemer 5: $0 = \frac{0}{5}$, $1 = \frac{5}{5}$, $2 = \frac{10}{5}$, $3 = \frac{15}{5}$ enzovoort. Maar je zou zelfs noemer 1 kunnen nemen: $0 = \frac{0}{1}$, $1 = \frac{1}{1}$, $2 = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$ enzovoort. Bij $1 = \frac{1}{1}$ kun je dan aan een pizza denken die in één stuk verdeeld is, dus daar is geen mes aan te pas gekomen! Alleen noemer 0 kan niet: je kunt een pizza niet in nul stukken verdelen. Als je niet snijdt, houd je immers niet nul stukken, maar één stuk over! Dat is daarom een algemene afspraak: bij breuken is de noemer niet nul. En ook de 'breuk' $\frac{0}{0}$ zullen wij nooit gebruiken. Er geldt dus: *de noemer van een breuk is nooit nul, de teller kan wel nul zijn.*

Vereenvoudig de volgende breuken en schrijf ze als een gemengde breuk (dat wil zeggen met het gehele deel apart):

8.19
- a. $\frac{40}{18}$
- b. $\frac{45}{27}$
- c. $\frac{220}{50}$
- d. $\frac{425}{40}$
- e. $\frac{126}{36}$

8.20
- a. $\frac{60}{36}$
- b. $\frac{100}{45}$
- c. $\frac{220}{55}$
- d. $\frac{260}{39}$
- e. $\frac{340}{51}$

8.21
- a. $\frac{450}{75}$
- b. $\frac{280}{42}$
- c. $\frac{360}{54}$
- d. $\frac{270}{81}$
- e. $\frac{240}{96}$

8.22
- a. $\frac{330}{25}$
- b. $\frac{240}{48}$
- c. $\frac{300}{18}$
- d. $\frac{420}{63}$
- e. $\frac{700}{91}$

Schrijf als een zoveel mogelijk vereenvoudigde gewone breuk:

8.23
- a. $3\,\frac{5}{8}$
- b. $2\,\frac{4}{7}$
- c. $4\,\frac{2}{5}$
- d. $3\,\frac{5}{6}$
- e. $2\,\frac{4}{9}$

8.24
- a. $13\,\frac{3}{7}$
- b. $12\,\frac{2}{9}$
- c. $18\,\frac{3}{5}$
- d. $20\,\frac{1}{4}$
- e. $30\,\frac{7}{8}$

8.25
- a. $2\,\frac{5}{18}$
- b. $3\,\frac{14}{27}$
- c. $4\,\frac{12}{15}$
- d. $5\,\frac{5}{26}$
- e. $2\,\frac{34}{39}$

8.26
- a. $8\,\frac{15}{80}$
- b. $7\,\frac{34}{70}$
- c. $5\,\frac{27}{50}$
- d. $4\,\frac{57}{60}$
- e. $7\,\frac{74}{90}$

Bepaal de grootste gemeenschappelijke deler (ggd) van de volgende paren getallen. Hint (voor als je het antwoord niet direct ziet): maak er een breuk van, vereenvoudig die breuk zoveel mogelijk en schrijf daarbij op welke delers je tegenkomt.

8.27
- a. 4 en 10
- b. 12 en 9
- c. 14 en 49
- d. 30 en 6
- e. 10 en 15

8.28
- a. 8 en 12
- b. 24 en 12
- c. 9 en 21
- d. 15 en 20
- e. 18 en 16

8.29
- a. 10 en 14
- b. 12 en 16
- c. 36 en 20
- d. 6 en 48
- e. 60 en 48

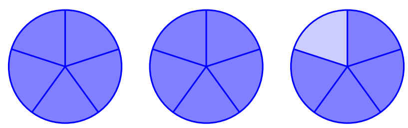
8.30
- a. 12 en 30
- b. 24 en 26
- c. 27 en 45
- d. 32 en 56
- e. 36 en 48

8.31
- a. 45 en 25
- b. 44 en 66
- c. 90 en 64
- d. 49 en 35
- e. 81 en 27

8.32
- a. 100 en 65
- b. 144 en 60
- c. 95 en 38
- d. 40 en 96
- e. 63 en 84

Gemengde breuken

Bij breuken groter dan 1 is de teller groter dan de noemer. Denk bijvoorbeeld aan de breuk $\frac{14}{5}$. Soms noteert men die als $2\,\frac{4}{5}$, want als je weer aan pizza's denkt, dan heb je met 14 stukken van $\frac{1}{5}$ pizza samen 2 hele pizza's (tien stukken van $\frac{1}{5}$) en nog vier stukken van $\frac{1}{5}$. Eigenlijk betekent $2\,\frac{4}{5}$ dus $2 + \frac{4}{5}$. Ook op bladzijde 79 (de derde liniaal) kun je dit controleren.



$$\frac{14}{5} = 2\,\frac{4}{5}$$

Een notatie als $2\,\frac{4}{5}$ noemen we een *gemengde breuk*. Als je een gewone breuk omzet in een gemengde breuk, doe je eigenlijk niets anders dan het *delen met rest* van de teller door de noemer. Immers, omdat $14 : 5 = 2$ *rest* 4 is $\frac{14}{5} = 2\,\frac{4}{5}$.

Bij het rekenen met breuken: optellen en aftrekken, maar vooral ook bij vermenigvuldigen en delen, is de gemengde vorm van een breuk niet handig. We zullen daarom in dit boek vrijwel uitsluitend met 'gewone' breukvormen zoals $\frac{14}{5}$ werken.

De grootste gemeenschappelijke deler (ggd)

Bij het vereenvoudigen van een breuk deel je teller en noemer door een *gemeenschappelijke deler*. Zo is $\frac{210}{294} = \frac{105}{147}$ (teller en noemer gedeeld door 2). Maar je kunt nog verder gaan: $\frac{105}{147} = \frac{35}{49}$ (gemeenschappelijke deler 3) en zelfs nog verder: $\frac{35}{49} = \frac{5}{7}$. Verder vereenvoudigen lukt niet. We hadden ook in één keer op $\frac{5}{7}$ uit kunnen komen door in de oorspronkelijke breuk $\frac{210}{294}$ de teller en noemer gelijk te delen door $42 = 2 \times 3 \times 7$. Inderdaad geldt dat $210 = 5 \times 42$ en $294 = 7 \times 42$. Het getal 42 is dus ook een gemeenschappelijke deler, en wel de *grootste gemeenschappelijke deler* (ggd).

Als je de ggd van de teller en de noemer van een breuk nog niet kent, kun je de eenvoudigste breukvorm ook stap voor stap bereiken, net zoals we dat hierboven hebben gedaan: net zo lang delers wegdelen totdat teller en noemer geen gemeenschappelijke deler meer hebben. Als je de delers die je onderweg tegengekomen bent, dan met elkaar vermenigvuldigt, krijg je de ggd. Dat is ook een van de manieren om de ggd van twee willekeurige natuurlijke getallen te berekenen: maak er een breuk van en vereenvoudig die zoveel mogelijk.

9 Rekenen met breuken

Maak de volgende breuken gelijknamig. Probeer daarbij steeds te werken met een zo klein mogelijke noemer.

9.1
- a. $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$
- b. $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$
- c. $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$
- d. $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{5}$
- e. $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{5}$

9.2
- a. $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{4}$
- b. $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{5}$
- c. $\frac{3}{4}$ en $\frac{2}{5}$
- d. $\frac{3}{5}$ en $\frac{1}{4}$
- e. $\frac{3}{2}$ en $\frac{4}{5}$

9.3
- a. $\frac{2}{6}$ en $\frac{3}{7}$
- b. $\frac{2}{5}$ en $\frac{5}{6}$
- c. $\frac{3}{4}$ en $\frac{2}{7}$
- d. $\frac{2}{3}$ en $\frac{4}{5}$
- e. $\frac{3}{8}$ en $\frac{2}{3}$

Bereken het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv) van

9.4
- a. 3 en 4
- b. 4 en 10
- c. 6 en 9
- d. 15 en 10
- e. 4 en 14

9.5
- a. 12 en 4
- b. 12 en 9
- c. 4 en 22
- d. 10 en 6
- e. 21 en 14

9.6
- a. 6 en 15
- b. 25 en 10
- c. 18 en 27
- d. 30 en 45
- e. 24 en 18

Maak de volgende opgaven. Werk daarbij met het kgv van de noemers en vereenvoudig de uitkomsten zoveel mogelijk.

9.7
- a. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$
- b. $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} =$
- c. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$
- d. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} =$
- e. $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} =$

9.8
- a. $\frac{3}{4} + \frac{1}{12} =$
- b. $\frac{1}{4} + \frac{11}{4} =$
- c. $\frac{15}{6} - \frac{2}{9} =$
- d. $\frac{13}{8} + \frac{5}{6} =$
- e. $\frac{5}{2} - \frac{7}{18} =$

9.9
- a. $\frac{1}{4} + \frac{1}{10} =$
- b. $\frac{1}{6} + \frac{1}{15} =$
- c. $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} =$
- d. $\frac{1}{9} - \frac{1}{12} =$
- e. $\frac{1}{9} - \frac{1}{15} =$

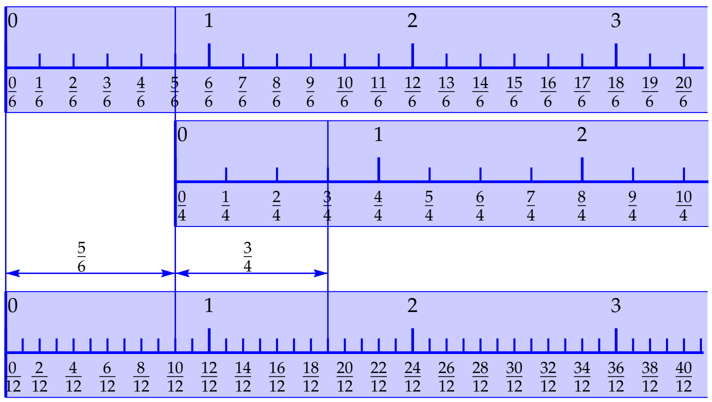
9.10
- a. $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} =$
- b. $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} =$
- c. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$
- d. $\frac{4}{5} - \frac{1}{9} =$
- e. $\frac{1}{2} + \frac{3}{7} =$

9.11
- a. $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} =$
- b. $\frac{8}{9} - \frac{5}{6} =$
- c. $\frac{2}{7} + \frac{3}{4} =$
- d. $\frac{5}{6} - \frac{3}{8} =$
- e. $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} =$

9.12
- a. $\frac{5}{12} + \frac{1}{16} =$
- b. $\frac{7}{15} - \frac{3}{10} =$
- c. $\frac{5}{18} + \frac{7}{12} =$
- d. $\frac{3}{20} + \frac{4}{15} =$
- e. $\frac{7}{16} - \frac{3}{20} =$

Optellen en aftrekken

Hoe tel je twee breuken bij elkaar op? Wat is bijvoorbeeld $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$? Kijk naar het plaatje hieronder:



Met de bovenste liniaal, die de breuken met noemer 6 bevat, is een stuk van lengte $\frac{5}{6}$ afgepast. Met de middelste liniaal, met daarop de breuken met noemer 4, een stuk van lengte $\frac{3}{4}$. Samen vormen ze een stuk van lengte $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$. Met de onderste liniaal, met daarop de breuken met noemer 12, zie je dat de lengte van de twee stukken samen $\frac{19}{12}$ is, want $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ en $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ en dus is

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{19}{12}$$

Dezelfde truc werkt ook bij aftrekken, bijvoorbeeld

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$$

Eigenlijk doe je in beide gevallen het omgekeerde van het vereenvoudigen van breuken. Je gaat van $\frac{5}{6}$ over op $\frac{10}{12}$ en van $\frac{3}{4}$ op $\frac{9}{12}$. Daarbij worden de noemers gelijk. Dit heet het *onder één noemer brengen* van de twee breuken. Je maakt de breuken *gelijknamig*. Als dat gebeurd is, is optellen kinderspel, want gelijknamige breuken kun je optellen door de tellers op te tellen: $\frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{19}{12}$. Net zo voor aftrekken.

Hoe kwamen we aan die noemer 12? Door naar de noemers 6 van $\frac{5}{6}$ en 4 van $\frac{3}{4}$ te kijken. De noemer 12 is zowel een veelvoud van 6 als van 4 want $12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$. Het getal 12 is dus een *gemeenschappelijk veelvoud* van 6 en van 4. Wil je het zo zuinig mogelijk doen, neem dan het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud*. Dat hebben we hier ook gedaan. We hadden bijvoorbeeld ook $24 = 4 \times 6 = 6 \times 4$ kunnen nemen, met als resultaat $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{20}{24} + \frac{18}{24} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12}$. Dezelfde einduitkomst, maar met meer werk.

Bereken het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv) van

9.13
- a. 3, 4 en 5
- b. 4, 8 en 10
- c. 6, 8 en 9
- d. 3, 10 en 15
- e. 4, 10 en 14

9.14
- a. 12, 3 en 4
- b. 12, 8 en 9
- c. 8, 12 en 16
- d. 10, 9 en 6
- e. 21, 35 en 15

9.15
- a. 6, 12 en 15
- b. 25, 15 en 10
- c. 18, 30 en 15
- d. 30, 42 en 35
- e. 24, 30 en 20

Maak de volgende breuken gelijknamig. Probeer daarbij steeds te werken met het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud* (kgv) van de noemers.

9.16
- a. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$
- b. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ en $\frac{2}{7}$
- c. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ en $\frac{2}{5}$
- d. $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{17}$ en $\frac{1}{2}$
- e. $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{4}$ en $\frac{1}{3}$

9.17
- a. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{5}$
- b. $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ en $\frac{2}{9}$
- c. $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$ en $\frac{1}{9}$
- d. $\frac{4}{15}$, $\frac{2}{9}$ en $\frac{1}{6}$
- e. $\frac{5}{18}$, $\frac{2}{15}$ en $\frac{3}{10}$

Bereken:

9.18
- a. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$
- b. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} =$
- c. $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} =$
- d. $\frac{1}{2} - \frac{1}{7} - \frac{1}{3} =$
- e. $\frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} =$

9.19
- a. $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{12} =$
- b. $\frac{3}{5} + \frac{3}{8} - \frac{5}{20} =$
- c. $\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{4}{15} =$
- d. $\frac{2}{5} + \frac{5}{9} - \frac{2}{15} =$
- e. $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{7}{10} =$

9.20
- a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} =$
- b. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} =$
- c. $\frac{5}{8} + \frac{1}{6} - \frac{2}{9} =$
- d. $\frac{5}{9} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} =$
- e. $\frac{5}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} =$

Bepaal telkens welke van de volgende twee breuken het grootst is. Hint: maak de breuken gelijknamig!

9.21
- a. $\frac{1}{6}$ en $\frac{2}{9}$
- b. $\frac{5}{18}$ en $\frac{4}{15}$
- c. $\frac{7}{15}$ en $\frac{4}{9}$
- d. $\frac{5}{24}$ en $\frac{2}{9}$
- e. $\frac{9}{20}$ en $\frac{11}{18}$

9.22
- a. $\frac{4}{9}$ en $\frac{3}{7}$
- b. $\frac{15}{8}$ en $\frac{28}{15}$
- c. $\frac{11}{36}$ en $\frac{9}{32}$
- d. $\frac{20}{63}$ en $\frac{25}{72}$
- e. $\frac{13}{21}$ en $\frac{7}{11}$

Meer over het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (kgv)

Bij het onder één noemer brengen van twee breuken, bijvoorbeeld $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$, zochten we een *gemeenschappelijk veelvoud* van de beide noemers 6 en 4. Als je het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud* (kgv) neemt, blijven de noemers zo klein mogelijk. Hier is 12 het kgv van 6 en 4, en we hebben $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ en $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

Wanneer je meer dan twee breuken bij elkaar op moet tellen, bijvoorbeeld $\frac{5}{6} + \frac{7}{4} + \frac{13}{21}$, is het handig om gelijk een gemeenschappelijk veelvoud te nemen van alle noemers die in het spel zijn. En het handigste is het dan natuurlijk weer om het *kleinste* gemeenschappelijke veelvoud (kgv) te nemen. Zo is

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{4} + \frac{13}{21} = \frac{70}{84} + \frac{147}{84} + \frac{52}{84} = \frac{269}{84}$$

want 84 is het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 6, 4 en 21.

Hoe bereken je zo'n kgv, bijvoorbeeld het kgv van 6, 4 en 21 ? Pak het grootste getal, 21 in dit geval, en bekijk achtereenvolgens de veelvouden $1 \times 21 = 21$, $2 \times 21 = 42$, enzovoort net zolang totdat je een veelvoud vindt dat ook een veelvoud is van 6 en van 4. Hier is $2 \times 21 = 42$ ook al een veelvoud van 6 (namelijk $7 \times 6 = 42$) maar nog niet van 4. Maar $4 \times 21 = 84$ is dat wel.

Eigenlijk is het bij het optellen en aftrekken van breuken niet strikt nodig om met het *kleinste* gemeenschappelijke veelvoud van alle noemers te werken. Met ieder ander gemeenschappelijk veelvoud lukt het ook, maar dan kunnen we de uitkomst aan het eind altijd nog vereenvoudigen, en dat betekent dus meer werk (zie ook de laatste regels van bladzijde 83).

9.23

a. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} =$

b. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} =$

c. $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} =$

d. $\frac{1}{3} \times \frac{7}{5} =$

e. $\frac{3}{5} \times \frac{3}{2} =$

9.24

a. $\frac{3}{4} \times \frac{1}{7} =$

b. $\frac{1}{5} \times \frac{3}{8} =$

c. $\frac{5}{7} \times \frac{7}{5} =$

d. $\frac{3}{8} \times \frac{1}{5} =$

e. $\frac{9}{5} \times \frac{4}{7} =$

9.25

a. $\frac{3}{8} \times \frac{5}{7} =$

b. $\frac{7}{6} \times \frac{1}{2} =$

c. $\frac{5}{8} \times \frac{3}{4} =$

d. $\frac{7}{9} \times \frac{2}{3} =$

e. $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} =$

Streep bij de volgende opgaven eerst gemeenschappelijke delers in teller en noemer (als die er zijn) tegen elkaar weg.

9.26

a. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} =$

b. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} =$

c. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} =$

d. $\frac{4}{3} \times \frac{5}{6} =$

e. $\frac{2}{9} \times \frac{3}{5} =$

9.27

a. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} =$

b. $\frac{5}{8} \times \frac{8}{5} =$

c. $\frac{5}{9} \times \frac{6}{8} =$

d. $\frac{4}{5} \times \frac{5}{8} =$

e. $\frac{5}{9} \times \frac{6}{7} =$

9.28

a. $\frac{5}{12} \times \frac{6}{10} =$

b. $\frac{7}{18} \times \frac{9}{14} =$

c. $\frac{3}{20} \times \frac{5}{12} =$

d. $\frac{7}{16} \times \frac{16}{7} =$

e. $\frac{4}{15} \times \frac{5}{12} =$

9.29

a. $\frac{7}{12} \times \frac{16}{21} =$

b. $\frac{8}{15} \times \frac{25}{27} =$

c. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{8} =$

d. $\frac{4}{3} \times \frac{5}{16} =$

e. $\frac{16}{9} \times \frac{3}{5} =$

9.30

a. $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} =$

b. $\frac{5}{7} \times \frac{4}{9} =$

c. $\frac{5}{9} \times \frac{6}{7} =$

d. $\frac{4}{15} \times \frac{3}{8} =$

e. $\frac{5}{9} \times \frac{6}{11} =$

9.31

a. $\frac{5}{12} \times \frac{7}{10} =$

b. $\frac{7}{18} \times \frac{9}{11} =$

c. $\frac{3}{20} \times \frac{7}{12} =$

d. $\frac{7}{16} \times \frac{8}{25} =$

e. $\frac{4}{25} \times \frac{5}{12} =$

Het tegen elkaar wegstrepen van gemeenschappelijke delers mag natuurlijk ook als je meer dan twee breuken met elkaar vermenigvuldigt. Bijvoorbeeld:

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{15} = \frac{5 \times 3 \times 7}{6 \times 4 \times 15} = \frac{5 \times \cancel{3}^{1} \times 7}{\cancel{6}_{2} \times 4 \times 15} = \frac{\cancel{5}^{1} \times 1 \times 7}{2 \times 4 \times \cancel{15}_{3}} = \frac{7}{24}$$

9.32

a. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{8} \times \frac{6}{21} =$

b. $\frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{12} =$

c. $\frac{2}{9} \times \frac{3}{7} \times \frac{21}{16} =$

d. $\frac{14}{9} \times \frac{16}{21} \times \frac{27}{32} =$

e. $\frac{8}{15} \times \frac{35}{24} \times \frac{5}{14} =$

9.33

a. $\frac{7}{5} \times \frac{2}{7} \times \frac{15}{8} =$

b. $\frac{5}{8} \times \frac{4}{3} \times \frac{9}{10} =$

c. $\frac{7}{9} \times \frac{7}{24} \times \frac{16}{7} =$

d. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} \times \frac{15}{48} =$

e. $\frac{5}{9} \times \frac{6}{11} \times \frac{18}{75} =$

9.34

a. $\frac{8}{7} \times \frac{11}{4} \times \frac{21}{22} =$

b. $\frac{15}{8} \times \frac{40}{3} \times \frac{9}{10} =$

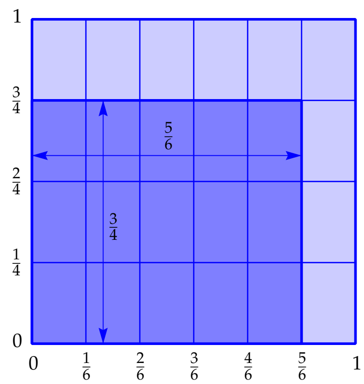
c. $\frac{7}{3} \times \frac{6}{25} \times \frac{15}{77} =$

d. $\frac{4}{5} \times \frac{30}{21} \times \frac{49}{45} =$

e. $\frac{2}{9} \times \frac{18}{7} \times \frac{21}{44} =$

Vermenigvuldigen

Hoe vermenigvuldig je twee breuken met elkaar? Wat is bijvoorbeeld $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$? Kijk naar de figuur hieronder.



De oppervlakte van een rechthoek is lengte maal breedte. Hierboven is binnen een vierkant met zijden van lengte 1 een rechthoek donker gekleurd met lengte $\frac{5}{6}$ en breedte $\frac{3}{4}$. Wat is de oppervlakte? De oppervlakte van het vierkant is 1. Je ziet dat het verdeeld is in $6 \times 4 = 24$ even grote deelrechthoekjes, die dus allemaal oppervlakte $\frac{1}{24}$ hebben. De donker gekleurde rechthoek telt $5 \times 3 = 15$ deelrechthoekjes, en de oppervlakte ervan is dus $\frac{15}{24}$, dus het product (de uitkomst van de vermenigvuldiging) is

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{15}{24}$$

Hetzelfde kun je doen met elk tweetal andere breuken: steeds krijg je als product een breuk met in de teller het product van de tellers en in de noemer het product van de noemers:

Het product van twee breuken is een breuk met in de teller het product van de tellers en in de noemer het product van de noemers.

In het bovenstaande geval kunnen we de uitkomst $\frac{15}{24}$ nog vereenvoudigen. Je kunt teller en noemer door 3 delen: $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$. Dat delen door 3 hadden we al eerder kunnen doen. In de middelste vorm zie je een 3 in de teller en een 6 in de noemer. Omdat $6 = 2 \times 3$ kun je teller en noemer door 3 delen:

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{5 \times \cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2} \times 4} = \frac{5 \times 1}{2 \times 4} = \frac{5}{8}$$

Op zo'n manier kun je je berekeningen door 'wegstrepen' vaak aanzienlijk vereenvoudigen!

9.35

a. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} =$

b. $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} =$

c. $\frac{2}{3} : \frac{3}{8} =$

d. $\frac{4}{3} : \frac{5}{6} =$

e. $\frac{2}{9} : \frac{3}{5} =$

9.36

a. $\frac{3}{4} : \frac{2}{7} =$

b. $\frac{5}{8} : \frac{8}{5} =$

c. $\frac{5}{9} : \frac{6}{8} =$

d. $\frac{4}{5} : \frac{5}{8} =$

e. $\frac{5}{9} : \frac{6}{7} =$

9.37

a. $\frac{5}{2} : \frac{6}{10} =$

b. $\frac{7}{8} : \frac{7}{40} =$

c. $\frac{3}{2} : \frac{6}{11} =$

d. $\frac{7}{6} : \frac{14}{27} =$

e. $\frac{4}{5} : \frac{8}{15} =$

9.38

a. $\frac{7}{12} : \frac{42}{5} =$

b. $\frac{8}{15} : \frac{24}{7} =$

c. $\frac{2}{3} : \frac{5}{18} =$

d. $\frac{4}{3} : \frac{5}{9} =$

e. $\frac{2}{9} : \frac{6}{5} =$

9.39

a. $\frac{3}{4} : \frac{6}{17} =$

b. $\frac{5}{8} : \frac{40}{9} =$

c. $\frac{5}{9} : \frac{7}{18} =$

d. $\frac{4}{5} : \frac{32}{9} =$

e. $\frac{5}{9} : \frac{16}{27} =$

9.40

a. $\frac{5}{12} : 10 =$

b. $\frac{7}{18} : 49 =$

c. $20 : \frac{5}{12} =$

d. $15 : \frac{3}{11} =$

e. $\frac{4}{15} : 16 =$

Je kunt nu ook ‘gemengde’ opgaven maken met meerdere delingen of vermenigvuldigingen. Vervang gewoon elke deling door een vermenigvuldiging met de omgekeerde breuk. Voorbeeld:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{2 \times 5 \times 4}{3 \times 3 \times 9} = \frac{40}{81}$$

En natuurlijk is het ook hier handig om, indien mogelijk, gemeenschappelijke delers in teller en noemer tegen elkaar weg te strepen. Maar doe dat pas *nadat* je elke deling hebt vervangen door een vermenigvuldiging met de omgekeerde breuk, anders maak je snel fouten!

9.41

a. $\frac{2}{3} : \frac{2}{5} \times \frac{9}{4} =$

b. $\frac{4}{3} : \frac{8}{7} \times \frac{3}{7} =$

c. $\frac{2}{7} : \frac{3}{5} : \frac{2}{3} =$

d. $\frac{4}{9} \times \frac{6}{11} : \frac{12}{33} =$

e. $\frac{8}{15} : \frac{5}{4} : \frac{4}{25} =$

9.42

a. $\frac{7}{5} : \frac{2}{7} \times \frac{15}{14} =$

b. $\frac{5}{8} : \frac{4}{5} \times \frac{9}{10} =$

c. $\frac{7}{9} \times \frac{7}{4} : \frac{21}{8} =$

d. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} : \frac{5}{18} =$

e. $\frac{5}{7} \times \frac{6}{11} : \frac{18}{7} =$

9.43

a. $\frac{8}{7} \times \frac{11}{4} : \frac{22}{5} =$

b. $\frac{15}{8} : \frac{4}{3} : \frac{21}{16} =$

c. $\frac{7}{3} : \frac{2}{5} \times \frac{15}{17} =$

d. $\frac{4}{5} : \frac{3}{24} \times \frac{9}{48} =$

e. $\frac{2}{9} : \frac{8}{7} \times \frac{21}{28} =$

Delen

Hoe deel je een breuk door een andere breuk? Bijvoorbeeld $\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$? Om daar achter te komen, brengen we in herinnering wat we op bladzijde 65 hebben geleerd: *delen door een getal is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde getal*. En we hebben daar ook geleerd: *een getal maal zijn omgekeerde is gelijk aan* 1.

Hier moeten we delen door $\frac{3}{4}$. Wat is het omgekeerde van de breuk $\frac{3}{4}$? Natuurlijk de breuk $\frac{4}{3}$ want volgens de regels voor het vermenigvuldigen van breuken geldt $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$. We zien dus dat

$$\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

Vanzelfsprekend geldt dit algemeen: de omgekeerde breuk krijg je door teller en noemer te verwisselen. Ook geldt in het algemeen:

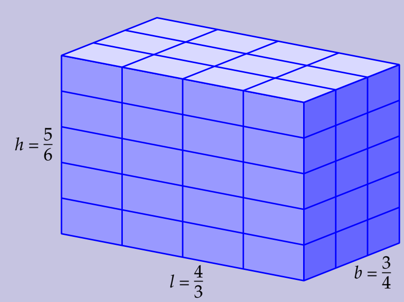
Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk.

Daarmee is het delen van breuken net zo makkelijk geworden als het vermenigvuldigen van breuken!

Delen van een breuk door een natuurlijk getal, bijvoorbeeld 7, valt ook onder deze regel want $7 = \frac{7}{1}$ en dus is bijvoorbeeld $\frac{5}{6} : 7 = \frac{5}{6} : \frac{7}{1} = \frac{5}{6} \times \frac{1}{7} = \frac{5}{42}$. En ook het delen van een natuurlijk getal door een breuk gaat volgens dezelfde regel. Bijvoorbeeld $7 : \frac{5}{6} = \frac{7}{1} : \frac{5}{6} = \frac{7}{1} \times \frac{6}{5} = \frac{42}{5}$.

Voor de liefhebbers geven we hieronder nog een meetkundige illustratie van het feit dat $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{3}$. Op dezelfde manier kun je elke deling van twee breuken met een blok illustreren. Maar het belangrijkste is natuurlijk dat je het delen zélf onder de knie krijgt door veel oefeningen te maken!

Hiernaast zie je een rechthoekig blok met een lengte $l = \frac{4}{3}$, een breedte $b = \frac{3}{4}$ en een hoogte $h = \frac{5}{6}$. De inhoud ervan is gelijk aan $I = l \times b \times h = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$, net als de hoogte, want de oppervlakte van het grondvlak is $l \times b = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1$.
De oppervlakte van het voorvlak is $h \times l = \frac{5}{6} \times \frac{4}{3}$, maar dat is ook gelijk aan de inhoud gedeeld door de breedte, dat wil zeggen dat die oppervlakte ook gelijk moet zijn aan $I : b = \frac{5}{6} : \frac{3}{4}$.



Omdat dus $I : b = h \times l$ geldt inderdaad dat $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{3}$.

Schrijf de volgende kommagetallen als een breuk. Geef je antwoorden in de meest vereenvoudigde vorm.

9.44
- a. $0,25$
- b. $0,025$
- c. $0,0025$
- d. $2,5$
- e. $2,25$

9.45
- a. $0,2$
- b. $0,04$
- c. $0,005$
- d. $2,2$
- e. $2,05$

9.46
- a. $0,12$
- b. $0,125$
- c. $0,0125$
- d. $2,32$
- e. $5,55$

9.47
- a. $0,05$
- b. $6,25$
- c. $0,625$
- d. $1,625$
- e. $0,1625$

9.48
- a. $2,8$
- b. $0,32$
- c. $0,335$
- d. $6,75$
- e. $6,8$

9.49
- a. $10,1$
- b. $10,25$
- c. $0,375$
- d. $37,5$
- e. $5,95$

Schrijf de volgende breuken als kommagetallen. Rond je antwoord af op vijf decimalen.

9.50
- a. $\frac{1}{2}$
- b. $\frac{1}{3}$
- c. $\frac{1}{4}$
- d. $\frac{2}{3}$
- e. $\frac{1}{5}$

9.51
- a. $\frac{2}{5}$
- b. $\frac{3}{2}$
- c. $\frac{3}{4}$
- d. $\frac{1}{6}$
- e. $\frac{5}{6}$

9.52
- a. $\frac{1}{7}$
- b. $\frac{1}{8}$
- c. $\frac{1}{9}$
- d. $\frac{8}{9}$
- e. $\frac{2}{7}$

9.53
- a. $\frac{3}{7}$
- b. $\frac{3}{8}$
- c. $\frac{4}{9}$
- d. $\frac{5}{3}$
- e. $\frac{6}{7}$

9.54
- a. $\frac{1}{12}$
- b. $\frac{1}{11}$
- c. $\frac{3}{11}$
- d. $\frac{1}{16}$
- e. $\frac{1}{15}$

9.55
- a. $\frac{4}{13}$
- b. $\frac{5}{18}$
- c. $\frac{6}{19}$
- d. $\frac{7}{20}$
- e. $\frac{8}{25}$

9.56 Op bladzijde 59 hebben we delingen met kommagetallen zoals $73 : 4,83$ uitgevoerd door het deeltal 73 en de deler $4,83$ eerst allebei met 100 te vermenigvuldigen. Daardoor werd de deler een natuurlijk getal, en dat maakte de staartdeling gemakkelijker. Verklaar nu ook waarom dit werkt door de deler als een gewone breuk te schrijven en de deling te schrijven als het vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk.

Breuken en kommagetallen

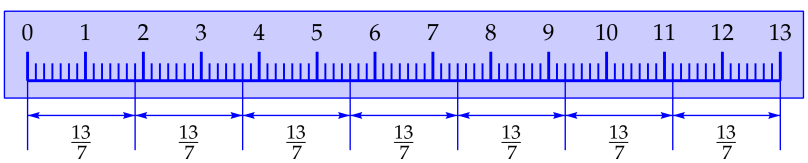
Kommagetallen zijn eigenlijk ook breuken, namelijk met noemer 10, 100, 1000, 10000, ... al naar gelang het aantal cijfers achter de komma. Zo is 3,54 hetzelfde als $\frac{354}{100}$, of $3\,\frac{54}{100}$ als je liever de gemengde breukvorm hanteert. Deze breuken kunnen nog vereenvoudigd worden tot respectievelijk $\frac{177}{50}$ en $3\,\frac{27}{50}$, maar zo'n vereenvoudiging is natuurlijk niet altijd mogelijk.

Omgekeerd hebben we in hoofdstuk 6 op bladzijde 57 eigenlijk al geleerd hoe je breuken met een voortgezette staartdeling in kommagetallen omzet, ook al wisten we toen nog niet wat breuken zijn! Maar met een voortgezette staartdeling kunnen we bijvoorbeeld $13 : 7$ in net zo veel decimalen uitrekenen als we willen:

$$7 \;\Big/\; 13,000000\ldots \;\Big\backslash\; 1,857142\ldots$$

(we hebben de staart weggelaten; die kun je zelf wel invullen, zie eventueel ook bladzijde 160). Afgerond op 5 decimalen komt daar $1,85714$ uit.

We kunnen zo het quotiënt van de deling $13 : 7$ met kommagetallen net zo nauwkeurig benaderen als we willen, maar nu we breuken kennen, kunnen we het quotiënt ook *exact* geven: het is de breuk $\frac{13}{7}$, kijk maar naar het volgende plaatje waarin de liniaal is onderverdeeld in stukjes van $\frac{1}{7}$.



Er geldt dus $13 : 7 = \frac{13}{7}$. Voor andere delingen met natuurlijke getallen geldt net zoiets, en daarmee is in feite het onderscheid tussen delingen met natuurlijke getallen en de bijbehorende breuken vrijwel vervallen.

En delen met rest? Dat is eigenlijk vrijwel hetzelfde als het omzetten van een gewone breuk in een gemengde breuk, dat wil zeggen een breuk waarin het gehele deel apart staat. Kijk maar: $13 : 7 = 1$ *rest* 6 betekent eigenlijk hetzelfde als $\frac{13}{7} = 1\,\frac{6}{7}$.

9.57

a. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} =$

b. $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{10}} =$

c. $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{2}} =$

d. $\dfrac{\frac{16}{35}}{\frac{20}{7}} =$

e. $\dfrac{\frac{12}{7}}{\frac{7}{14}} =$

9.58

a. $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}} =$

b. $\dfrac{\frac{16}{9}}{\frac{4}{3}} =$

c. $\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{14}} =$

d. $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}} =$

e. $\dfrac{\frac{5}{7}}{\frac{4}{21}} =$

9.59

a. $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{4}} =$

b. $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{6}{11}} =$

c. $\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{6}} =$

d. $\dfrac{\frac{6}{13}}{\frac{7}{5}} =$

e. $\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{9}} =$

9.60

a. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} =$

b. $\dfrac{\frac{5}{9}+\frac{3}{10}}{\frac{3}{4}-\frac{4}{9}} =$

c. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} =$

d. $\dfrac{\frac{5}{7}+\frac{7}{10}}{\frac{3}{5}-\frac{1}{9}} =$

e. $\dfrac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} =$

9.61

a. $\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} =$

b. $\dfrac{\frac{5}{9}+\frac{3}{7}}{\frac{3}{5}-\frac{1}{9}} =$

c. $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}} =$

d. $\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{7}{10}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{7}} =$

e. $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}} =$

9.62

a. $\dfrac{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} =$

b. $\dfrac{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}} =$

c. $\dfrac{\frac{3}{8}+\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}} =$

d. $\dfrac{\frac{5}{2}-\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{2}{5}} =$

e. $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{5}{12}}{\frac{6}{7}+\frac{3}{5}} =$

Breuken in breuken

In de vorige paragraaf hebben we gezien dat $13 : 7 = \frac{13}{7}$. Een breuk zoals $\frac{13}{7}$ kun je dus zien als het resultaat van een deling, de deling $13 : 7$ in dit geval. Daarom wordt $\frac{13}{7}$ ook wel uitgesproken als '13 gedeeld door 7' in plaats van als 'dertien zevenden'.

In veel toepassingen, bijvoorbeeld in de economie of in de natuurkunde, komt je formules tegen waarin breuken voorkomen met in de teller en de noemer zelf weer breuken. Bijvoorbeeld

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{\frac{2}{5}-\frac{1}{11}}$$

Onervaren rekenaars schrikken daarvan, maar daarvoor is geen enkele reden. Reken gewoon de teller en de noemer apart uit. De teller is $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{7}{21}+\frac{3}{21}=\frac{10}{21}$ en de noemer is $\frac{2}{5}-\frac{1}{11}=\frac{22}{55}-\frac{5}{55}=\frac{17}{55}$. De gehele breuk is dus

$$\frac{\frac{10}{21}}{\frac{17}{55}}$$

oftewel $\frac{10}{21} : \frac{17}{55}$. En omdat delen door een breuk hetzelfde is als vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk, is dit $\frac{10}{21} \times \frac{55}{17} = \frac{550}{357}$.

Andere notaties voor breuken

In plaats van een horizontale scheidingsstreep tussen teller en noemer wordt soms ook een schuine streep gebruikt: $13/7$ in plaats van $\frac{13}{7}$. Die schuine breukstreep wordt soms ook gebruikt als deelteken in plaats van de dubbele punt, bijvoorbeeld op rekenmachines. Dit onderstreept opnieuw dat er eigenlijk nauwelijks onderscheid is tussen een deling van twee natuurlijke getallen en de bijbehorende breuk.
Het kan om typografische redenen ook handiger zijn om de schuine-streepnotatie te gebruiken. De twee notaties worden bij 'breuken in breuken' ook wel samen gebruikt, vaak ook weer om de typografie overzichtelijker te maken, bijvoorbeeld

$$\frac{5/13}{12/7} \quad \text{of} \quad \frac{5}{13} \Big/ \frac{12}{7}$$

Gemengde opgaven.

Vereenvoudig de volgende breuken zoveel mogelijk:

9.63

a. $\frac{48}{36}$

b. $\frac{54}{81}$

c. $\frac{45}{126}$

d. $\frac{121}{132}$

e. $\frac{210}{196}$

9.64

a. $\frac{128}{72}$

b. $\frac{104}{78}$

c. $\frac{156}{120}$

d. $\frac{91}{105}$

e. $\frac{275}{300}$

Geef bij de volgende opgaven de uitkomst in een zoveel mogelijk vereenvoudigde vorm

9.65

a. $\frac{5}{33} + \frac{9}{22} =$

b. $\frac{7}{24} - \frac{3}{16} =$

c. $\frac{13}{12} + \frac{4}{15} =$

d. $\frac{4}{9} \times \frac{4}{11} =$

e. $\frac{7}{5} : \frac{5}{7} =$

9.66

a. $\frac{27}{16} \times \frac{8}{15} =$

b. $\frac{4}{25} + \frac{24}{35} =$

c. $\frac{35}{48} \times \frac{40}{49} =$

d. $\frac{4}{9} - \frac{4}{11} =$

e. $\frac{21}{55} : \frac{7}{5} =$

9.67

a. $\frac{27}{16} - \frac{8}{15} =$

b. $\frac{4}{25} : \frac{24}{35} =$

c. $\frac{35}{48} + \frac{7}{8} =$

d. $\frac{44}{13} : \frac{121}{39} =$

e. $\frac{21}{55} + \frac{7}{5} =$

9.68

a. $\dfrac{\frac{5}{6} + \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} =$

b. $\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} =$

c. $\dfrac{\frac{7}{8} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{5} + \frac{1}{4}} =$

d. $\dfrac{\frac{3}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}} =$

e. $\dfrac{\frac{4}{5} - \frac{1}{7}}{\frac{6}{7} + \frac{2}{5}} =$

9.69

a. $\dfrac{\frac{5}{6} \times \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} =$

b. $\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} : \frac{1}{3}} =$

c. $\dfrac{\frac{7}{8} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}} =$

d. $\dfrac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}} =$

e. $\dfrac{\frac{4}{5} - \frac{1}{7}}{\frac{6}{7} : \frac{2}{5}} =$

Een overzicht van alle rekenregels

We geven nu een overzicht van alle rekenregels voor breuken. Twee algemene regels zijn:

> *Een breuk verandert niet als je teller en noemer allebei door een gemeenschappelijke deler deelt.*

> *Een breuk verandert niet als je teller en noemer allebei met hetzelfde getal vermenigvuldigt.*

In dat laatste geval mag het getal waarmee je teller en noemer vermenigvuldigt natuurlijk niet nul zijn, want anders krijg je $\frac{0}{0}$ (zie onderaan bladzijde 79).

Vereenvoudigen

Je vereenvoudigt een breuk als je teller en noemer deelt door een gemeenschappelijke deler. Wanneer je deelt door de *grootste gemeenschappelijke deler* (ggd) krijg je een breuk die niet verder te vereenvoudigen is.

Optellen en aftrekken

Je telt twee breuken bij elkaar op door ze eerst gelijknamig te maken en vervolgens de tellers bij elkaar op te tellen. Voorbeeld:

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{19}{12}$$

Je trekt twee breuken van elkaar af door ze eerst gelijknamig te maken en vervolgens de tellers van elkaar af te trekken. Voorbeeld:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$$

Twee breuken maak je gelijknamig door als noemer te nemen een gemeenschappelijk veelvoud van de noemers. Als je het *kleinste gemeenschappelijke veelvoud* (kgv) neemt, houd je de noemers zo klein mogelijk.

Vermenigvuldigen en delen

Het product van twee breuken is de breuk met als teller het product van de tellers en als noemer het product van de noemers. Voorbeeld:

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{28}$$

Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk. Voorbeeld:

$$\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{21}$$